

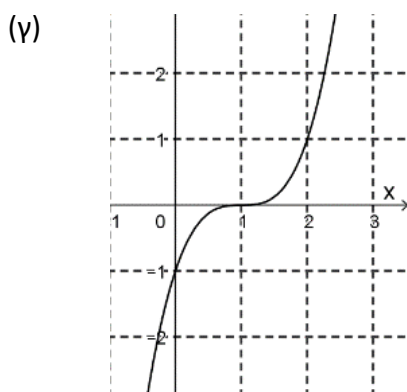
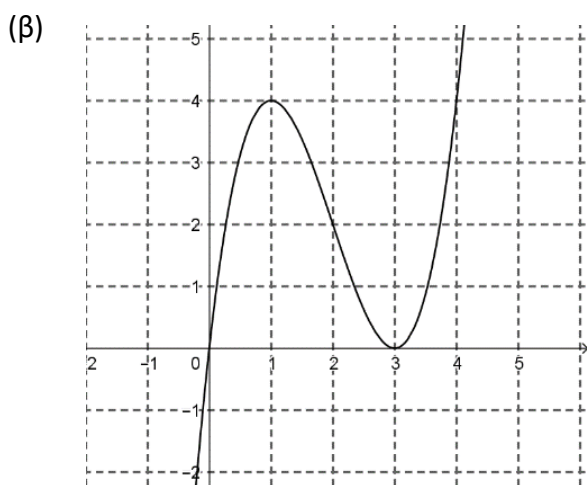
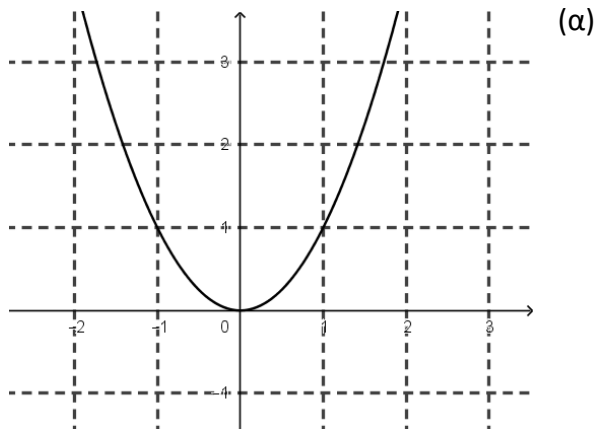
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

- Επαναληπτικές ασκήσεις
- Γραπτό Παγκυπρίων Εξετάσεων 2023-2024
- Γραπτό Παγκυπρίων Εξετάσεων 2022-2023
- Γραπτό Παγκυπρίων Εξετάσεων 2021-2022
- Γραπτό Παγκυπρίων Εξετάσεων 2020-2021
- Τυπολόγιο

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

1. Να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων:



2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία με βάση τον ορισμό την πιο κάτω συνάρτηση:

$$f(x) = 3 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

3. Να μελετήσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα:

(α) $f(x) = x^2 - 6x + 9, \quad x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = 3x^5 - 5x^3, \quad x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = x^3 + 4x, \quad x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(x) = x^3 - \frac{7x^2}{2} + 2x + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$

4. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις **δεν** έχουν ακρότατα:

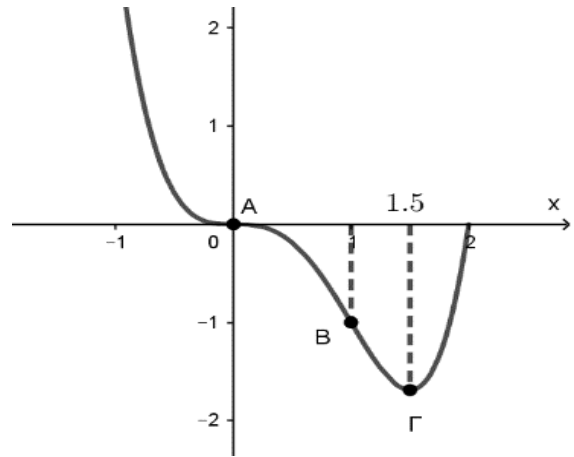
(α) $f(x) = x^7 + 9, \quad x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = x^3 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 8x$ έχει ολικό ελάχιστο για $x = 2$.
6. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των πιο κάτω συναρτήσεων στο δοθέν διάστημα:
 (α) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, $x \in [2,6]$
 (β) $f(x) = x^2 - 4x - 5$, $x \in [-3,5]$
 (γ) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$, $x \in [0,3]$
7. Για τις πιο κάτω συναρτήσεις, δίνονται οι παράγωγοί τους:
 (i) $f'(x) = x^2(x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$
 (ii) $f'(x) = (x + 3)(x - 1)(4x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε σε κάθε περίπτωση:
 (α) τα κρίσιμα σημεία της f
 (β) τα διαστήματα μονοτονίας της f
 (γ) τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της f
8. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις πιο κάτω συναρτήσεις με τύπο:
 (α) $f(x) = x^2 - 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$
 (β) $f(x) = -x^4 + 4x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.
 (γ) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $x \in \mathbb{R}$
9. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = x^2(x - 2)(x + 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία, τα διαστήματα μονοτονίας, τη θέση των σημείων καμπής και τα διαστήματα κυρτότητας.
10. (α) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει σημείο καμπής το $A(-1,4)$. Να βρείτε τις τιμές των α και β .
 (β) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha x^2 - 4x + 2\beta$, $x \in \mathbb{R}$, να παρουσιάζει στο $x = 1$, ακρότατο με τιμή ίση με 2. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου στη θέση $x = 1$.
 (γ) Η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^3 - 9x^2 + \lambda x + 1$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, έχει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ και σημείο καμπής στο $x = \frac{3}{2}$. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .
11. (α) Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} έχει δεύτερη παράγωγο με τύπο:
- $$f''(x) = (x + 5)^3(x - 2)^2$$
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα. Για ποιες τιμές του x η συνάρτηση παρουσιάζει σημείο καμπής;
- (β) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:
- $$f'(x) = x^2(x - 2)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
- Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ δεν έχει τοπικά ακρότατα και ακολουθώς να βρείτε για ποιες τιμές του x η $f(x)$ παρουσιάζει σημεία καμπής.
12. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:
 (α) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
 (β) $g(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}$
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x + 2$, $x \in [-3,5]$. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της και στη συνέχεια να βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα καθώς και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

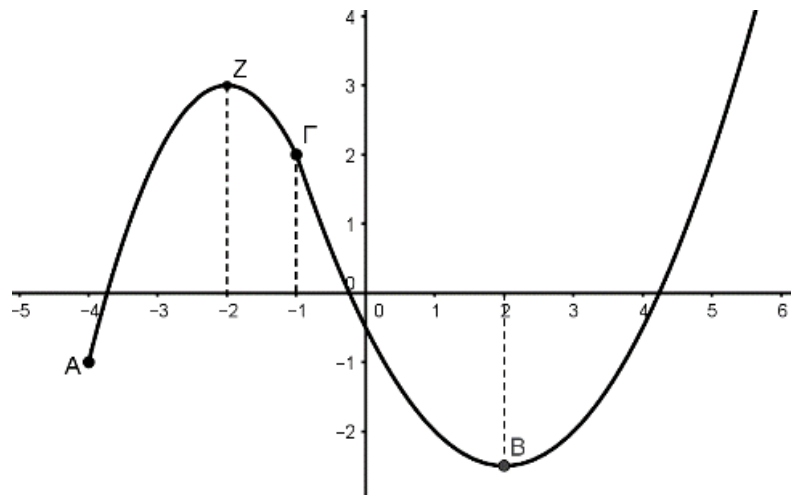
14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $f: [-1,2] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. Να βρείτε τις τιμές του $x \in [-1,2]$ για τις οποίες:

- (α) $f'(x) = 0$ και $f''(x) = 0$
- (β) $f'(x) < 0$
- (γ) $f'(x) > 0$

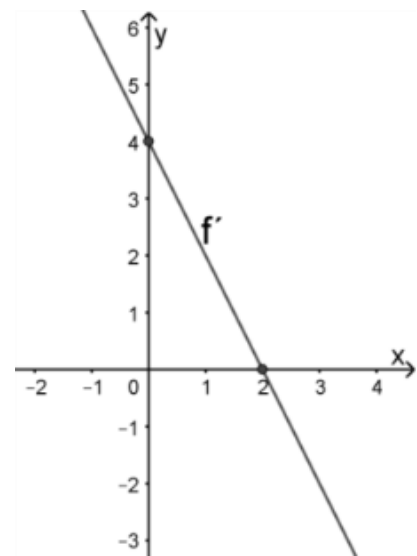


15. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: [-4,6] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία A, B και Z και σημεία καμπής στο σημείο Γ. Να βρείτε τις τιμές του $x \in [-4,6]$ για τις οποίες:

- (α) $f'(x) > 0$
- (β) $f'(x) < 0$
- (γ) $f'(x) = 0$
- (δ) $f''(x) > 0$
- (ε) $f''(x) < 0$
- (στ) $f''(x) = 0$



16. Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση της f' που δίνεται στο διπλανό σχήμα, για να βρείτε για ποια τιμή του x η γραφική παράσταση της $y = f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο δικαιολογώντας την απάντησή σας. Στη συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο \mathbb{R} .



17. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ για την οποία δίνονται οι ακόλουθες πληροφορίες:

- (α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- (β) η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη
- (γ) η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$, $(1,4)$, $(2,2)$, $(3,0)$
- (δ) το πρόσημο των δύο πρώτων παραγώγων της f μεταβάλλεται ως εξής:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

18. Δίνονται δύο θετικοί αριθμοί των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με 8. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς, ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.
19. Μία βιομηχανία παράγει, μεταξύ άλλων, μονάδες κάποιου προϊόντος. Υπολογίστηκε ότι η παραγωγή x μονάδων την ημέρα κοστίζει $x^2 + 50x + 100$ ευρώ, $0 \leq x \leq 150$. Αν η τιμή πώλησης μιας μονάδας είναι $(450 - x)$ ευρώ, να βρείτε:
- τη συνάρτηση κέρδους της βιομηχανίας από την πώληση x μονάδων προϊόντος,
 - πόσες μονάδες του προϊόντος αυτού πρέπει να παράγει την ημέρα η βιομηχανία, ώστε να έχει μέγιστο κέρδος.
20. Η βάση ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου και το διπλάσιο του ύψους του έχουν άθροισμα 12 cm. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ώστε το εμβαδό του να είναι μέγιστο.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αόριστα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int 5dx$$

$$(\beta) \int dx$$

$$(\gamma) \int -3x^2 dx$$

$$(\delta) \int (x^6 - 8x^3 + 7)dx$$

$$(\epsilon) \int (7x^6 + 6x^3 - 4x + 1)dx$$

$$(\sigma\tau) \int (x^2 + 1)(5 - x^2)dx$$

$$(\zeta) \int (5x - 2)(x + 4)dx$$

$$(\eta) \int 3t(2t - 3)^2 dx$$

$$(\theta) \int -2(x + 4)^2 dx$$

$$(\iota) \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{9}{\sqrt{x}} \right) dx$$

2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ σε κάθε περίπτωση:

$$(\alpha) f'(x) = 2x - 4, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ αν } f(-2) = 4$$

$$(\beta) f''(x) = 6 - 4x, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ αν η } f(x) \text{ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, το } f(1) = -2$$

$$(\gamma) f''(x) = 9x^2 + 6, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ αν η } f(x) \text{ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, το } f(1) = 5$$

$$(\delta) f''(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ αν } f(0) = 3 \text{ και } f(3) = 6$$

$$(\epsilon) f''(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ αν η γραφική παράσταση της } f \text{ διέρχεται από τα σημεία } A(0,3) \text{ και } B(-1,3).$$

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ ώστε:

$$\int (\kappa + \lambda) x^{2\lambda-3} dx = -2x^6 + c$$

4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa$ και λ ώστε να ισχύουν:

$$(\alpha) \int (\alpha x^3 + 3\beta x^2 - 4\gamma x - 5\delta) dx = 3x^4 - 8x^3 + x + 10 + c$$

$$(\beta) \int (\kappa - \lambda) x^2 dx = 2x^5 + c$$

5. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το έδαφος και κινείται κάθετα προς τα πάνω με ταχύτητα (σε m/s) που δίνεται από τον τύπο $v(t) = 2t + 6$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. Να υπολογίσετε:

$$(\alpha) \text{ το ύψος του ελικοπτέρου την χρονική στιγμή } t = 6 \text{ sec}$$

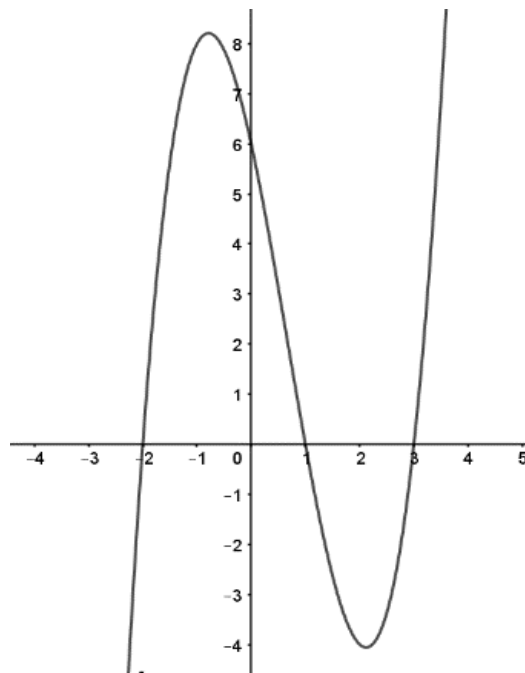
$$(\beta) \text{ τον χρόνο που απαιτείται για να φτάσει το ελικόπτερο σε ύψος } 520 \text{ m.}$$

6. Αυτοκίνητο ξεκινά από σημείο A και κινείται πάνω σε ευθεία (ϵ). Αν το αυτοκίνητο έχει σταθερή επιτάχυνση $\frac{1}{2} \text{ m/s}^2$, να βρείτε την εξίσωση $v(t)$ της ταχύτητάς του και τον χρόνο που χρειάζεται για να διανύσει απόσταση 400m.

7. (α) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Αν ισχύει ότι:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

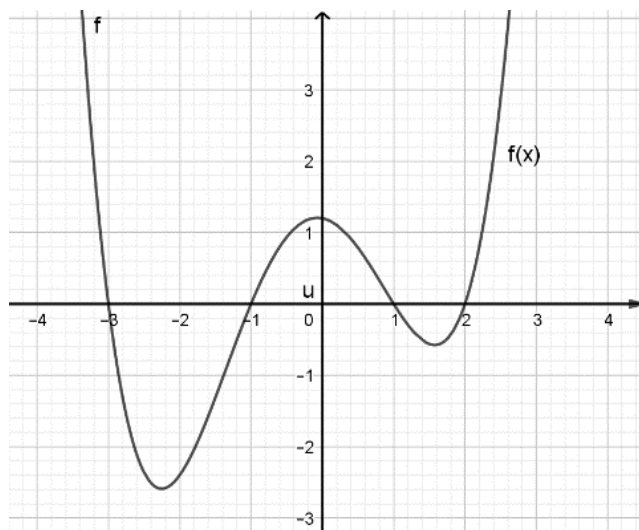
Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση $F(x)$ παρουσιάζει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα (να υποδείξετε πότε έχουμε τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο).



- (β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Αν ισχύει ότι:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση $F(x)$ παρουσιάζει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα (να υποδείξετε πότε έχουμε τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο).



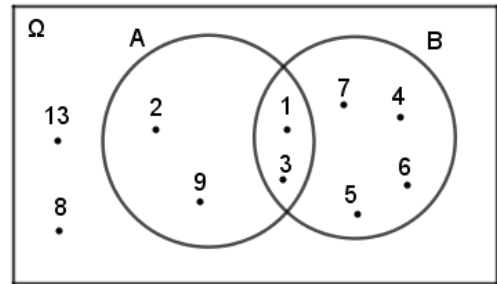
8. Για μία επιχείρηση, η συνάρτηση οριακού κόστους $m(x)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους $K(x)$ συναρτήσει της ποσότητας παραγωγής x (δηλαδή, $m(x) = K'(x)$). Αν η συνάρτηση οριακού κόστους σε μία βιοτεχνία παραγωγής ξύλινων καρεκλών είναι $m(x) = x(6x - 1)$ και το συνολικό κόστος για την παραγωγή 4 ξύλινων καρέκλων είναι 110 ευρώ, να βρείτε:

- (α) τη συνάρτηση του συνολικού κόστους $K(x)$ και
 (β) το συνολικό κόστος για την παραγωγή 20 ξύλινων καρεκλών.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΣΥΝΟΛΑ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΣΥΝΟΛΑ

- Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται ένα σύνολο αναφοράς Ω και τα υποσύνολα του A και B.
 - Να βρείτε τα πιο κάτω σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους:
 - $A \cap B$
 - $(A \cup B)'$
 - $B - A$
 - Πόσα υποσύνολα του συνόλου B με πληθικό αριθμό 3 υπάρχουν;



- Σε μία τάξη 24 παιδιών, οι 14 προτιμούν ως αγαπημένο τους φρούτο το καρπούζι, ενώ οι 10 προτιμούν το πεπόνι. Αν υπάρχουν 6 παιδιά που δεν προτιμούν ούτε το καρπούζι, ούτε το πεπόνι, πόσα από τα παιδιά προτιμούν και καρπούζι και πεπόνι;
- Δίνονται τα σύνολα:

$A = \{\text{γράμματα της λέξης Α Λ Γ Ε Β Ρ Α}\}$
 $B = \{\text{γράμματα της λέξης Φ Ρ Ε Γ Α Τ Α}\}$
 $\Gamma = \{\text{γράμματα της λέξης Ε Λ Α Φ Ι}\}$

 - Να γράψετε τα σύνολα A, B, Γ με αναγραφή των στοιχείων τους και να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn.
 - Να προσδιορίσετε τα σύνολα $B \cup \Gamma$, $A \cap B$, $A \cap \Gamma$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

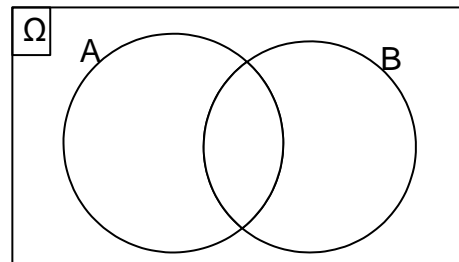
- Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:
 - $A = \frac{12!}{3! 10!} + \frac{7!}{5! 2!}$
 - $B = \frac{v! + (v + 1)!}{v + 2}$
- Να λύσετε τις εξισώσεις:
 - $\frac{K_{v+3}}{M_v} = 6$
 - $\Delta_2^{v+1} = 3 \cdot \binom{v}{2}$
 - $\Delta_3^{v+1} = \Delta_4^v$
 - $\binom{v}{3} = \binom{v}{5}$
- Να βρείτε το πλήθος της λέξης **ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ**.
 - Πόσοι από αυτούς αρχίζουν και τελειώνουν με «Ο»;
 - Πόσοι από αυτούς έχουν όλα τα φωνήεντα μαζί;
 - Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από σύμφωνο;
- Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΚΥΡΙΑΚΟΣ**.
 - Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από Κ;
 - Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από Υ και τελειώνουν σε Σ;
 - Πόσοι από αυτούς έχουν όλα τα σύμφωνα μαζί;
 - Αν πάρουμε τυχαία ένα αναγραμματισμό, ποια η πιθανότητα να αρχίζει με Κ;
- Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΒΙΟΛΟΓΙΚΟΣ**.
 - Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από σύμφωνο;
 - Πόσοι από αυτούς έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις;
 - Σε πόσους από αυτούς δεν εμφανίζεται η λέξη **ΛΟΓΙΚΟΣ**;
- Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 8 άτομα γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι, αν τρία από αυτά θα πρέπει να καθίσουν σε συνεχόμενες θέσεις.
 - Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε κυκλικό τραπέζι 10 άτομα μίας επιτροπής, αν ο πρόεδρος πρέπει να κάθεται ανάμεσα στον αντιπρόεδρο και τον γραμματέα;

7. Δίνονται τα ψηφία **1, 2, 3, 5, 7**.
- (α) Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη;
 (β) Πόσοι από αυτούς είναι μεγαλύτεροι του 200 και μικρότεροι του 700;
 (γ) Πόσους περιττούς χωρίς επανάληψη μπορούμε να σχηματίσουμε;
8. Δίνονται τα ψηφία **0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8**.
- (α) Πόσοι **τριψήφιοι** αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;
 (β) Πόσοι **τετραψήφιοι** αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν αν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;
 (γ) Πόσοι **τριψήφιοι** αριθμοί χωρίς επανάληψη μπορούν να σχηματιστούν που να είναι μεγαλύτεροι του 300 και μικρότεροι του 800;
 (δ) Πόσοι **τριψήφιοι** αριθμοί χωρίς επανάληψη μπορούν να σχηματιστούν που να είναι άρτιοι;
9. Μια τάξη έχει 12 αγόρια και 8 κορίτσια
- (α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια πενταμελή επιτροπή;
 (β) Πόσοι από αυτούς περιέχουν ακριβώς ένα μόνο κορίτσι;
 (γ) Πόσοι περιέχουν τουλάχιστο τρία κορίτσια;
 (δ) Πόσοι περιέχουν το πολύ ένα κορίτσι;
10. Η Μαρία θα πάει εκδρομή και θέλει να πάρει μαζί της 3 παντελόνια. Αν η Μαρία έχει 8 παντελόνια κατάλληλα για την εκδρομή, κατά πόσους τρόπους μπορεί να διαλέξει τα 3 παντελόνια που θα πάρει μαζί της;
11. Μία τράπεζα θα προσλάβει 5 υπαλλήλους ανάμεσα σε 6 άντρες και 4 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν:
- (α) δεν υπάρχουν περιορισμοί.
 (β) θα προσληφθούν 3 άντρες και 2 γυναίκες.
 (γ) θα προσληφθούν τουλάχιστον 3 άντρες.
 (δ) θα προσληφθούν άτομα του ίδιου φύλου.
 (ε) θα προσληφθούν 2 συγκεκριμένοι άντρες και 1 συγκεκριμένη γυναίκα.
 (στ) θα προσληφθούν άτομα και από τα 2 φύλα.
12. Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία **2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων; Πόσοι από αυτούς περιέχουν μόνο άρτια ψηφία;
13. Ένας φωτογράφος και ένας ζωγράφος αποφασίζουν να κάνουν έκθεση και συμφωνούν να παρουσιάσουν 5 φωτογραφίες και 4 πίνακες ζωγραφικής αντίστοιχα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η παρουσίαση αν ο φωτογράφος έχει στη διάθεση του 9 φωτογραφίες και ο ζωγράφος 8 πίνακες και οι φωτογραφίες - πίνακες τοποθετούνται μαζί, εναλλάξ σε σειρά.
14. Δίνεται το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Να βρείτε:
- (α) πόσους πενταψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του A
 (β) πόσοι από τους αριθμούς αυτούς έχουν τα πρώτα ψηφία περιττά
 (γ) πόσοι από τους αριθμούς αυτούς έχουν ως πρώτο ψηφίο το 2 και ως τελευταίο ψηφίο το 4.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Αν τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου και $P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B) = \frac{3}{5}$ και $P(A \cap B) = \frac{3}{10}$, να βρείτε:
- (α) $P(B)$ (β) $P(A \cup B)$ (γ) $P(B \cap A')$ (δ) $P(A \cap B)'$
2. Αν ρίξω ένα νόμισμα δύο φορές, ποια η πιθανότητα να φέρω και τις δύο φορές Γράμματα ;
3. Ρίχνουμε ένα εξάεδρο αμερόληπτο ζάρι δύο φορές. Ποια η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 8;

4. Ρίχνουμε τα γράμματα α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ σε ένα σακούλι και επιλέγουμε ένα στην τύχη. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
- $A = \{ \text{το γράμμα είναι ανάμεσα στα 5 πρώτα γράμματα του αλφαβήτου} \}$
 $B = \{ \text{το γράμμα είναι φωνήεν} \}$
- (α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
 (β) Να τοποθετήσετε τα στοιχεία του δειγματικού χώρου στο διπλανό διάγραμμα.
 (γ) Να βρείτε τα σύνολα:
- | | |
|-------------------|---------------------|
| (i) A' | (ii) $A \cup B$ |
| (iii) $A \cap B$ | (iv) $A - B$ |
| (v) $A' \cap B$ | (vi) $A' \cap B'$ |
| (vii) $A \cup B'$ | (viii) $A' \cup B'$ |
- (δ) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
- | | |
|------------------|-----------------|
| (i) A | (ii) $A \cup B$ |
| (iii) $A \cap B$ | (iv) $A - B$ |
5. Σε ένα συρτάρι υπάρχουν 3 μαύρες μπλούζες και 5 άσπρες μπλούζες. Παίρνουμε στην τύχη 2. Να βρείτε:
- (α) τον πληθικό αριθμό του δειγματικού χώρου
 (β) τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
 $A = \{ \text{και οι δύο είναι άσπρες} \}$
 $B = \{ \text{και οι δύο είναι του ίδιου χρώματος} \}$
 $\Gamma = \{ \text{η μία είναι άσπρη και η άλλη μαύρη} \}$
6. Σε ένα σχολείο, 23% των τελειοφοίτων εξασφάλισαν θέση σε πανεπιστήμιο της Κύπρου, 80% εξασφάλισαν θέση σε πανεπιστήμιο της Ελλάδας και 18% εξασφάλισαν θέση και στις δύο χώρες. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα από τους τελειόφοιτους του σχολείου αυτού, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
- $A = \{ \text{δεν εξασφάλισε θέση στην Ελλάδα} \}$
 $B = \{ \text{εξασφάλισε θέση είτε στην Κύπρο είτε στην Ελλάδα} \}$
 $\Gamma = \{ \text{δεν εξασφάλισε θέση σε καμιά από τις δύο χώρες} \}$
 $\Delta = \{ \text{εξασφάλισε θέση μόνο σε μία από τις δύο χώρες} \}$
7. **Μία τετραμελής** διεθνής επιτροπή θα επιλεγεί από 5 Ευρωπαίους, 6 Ασιάτες και 2 Αμερικάνους. Ποια η πιθανότητα να αποτελείται:
- (α) μόνο από Ευρωπαίους,
 (β) από τουλάχιστον τρεις Ασιάτες,
 (γ) από τουλάχιστον ένα Ευρωπαίο.
8. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μια φορά. Δίνονται τα ενδεχόμενα:
- $A = \{ \text{Η ένδειξη είναι περιττός αριθμός} \}$
 $B = \{ \text{Η ένδειξη είναι πολλαπλάσιο του 3} \}$
 Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
- | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|
| (α) A | (β) B | (γ) A' |
| (δ) $A - B$ | (ε) $A \cap B$ | (ζ) $A \cup B$ |
| (η) $A' \cup B$ | (θ) $A' \cap B'$ | (ι) $(A \cup B)'$ |
| (κ) $A' \cup B'$ | (λ) $(A \cap B)'$ | |



9. Σε ένα διαγωνισμό διακρίθηκαν 3 αγόρια και 4 κορίτσια από το τμήμα Γ_{31} και 4 κορίτσια και 1 αγόρι από το τμήμα Γ_{61} . Θα επιλεγεί τυχαία ένας μαθητής από τους 12 διακριθέντες να εκπροσωπήσει το σχολείο σε μια ημερίδα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

- (α) το σχολείο να εκπροσωπηθεί από αγόρι του τμήματος Γ_{31} .
 (β) το σχολείο να εκπροσωπηθεί από αγόρι
 (γ) το σχολείο να εκπροσωπηθεί από παιδί του τμήματος Γ_{61}
 (δ) το σχολείο να εκπροσωπηθεί από παιδί του τμήματος Γ_{31}

10. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , για τα οποία ισχύει:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{5} \quad \text{και} \quad P(B') = \frac{7}{10}$$

- (α) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

$\Gamma = \{\text{Πραγματοποιείται το B}\}$

$\Delta = \{\text{Δεν πραγματοποιείται ούτε το A ούτε το B}\}$

$E = \{\text{Πραγματοποιείται μόνο το A}\}$

$Z = \{\text{Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B}\}$

- (β) Τα ενδεχόμενα Γ και Δ είναι ασυμβίβαστα;

11. Σε μια ομάδα εργασίας για το περιβάλλον συμμετέχουν 6 Ευρωπαίοι και 4 Αμερικανοί επιστήμονες. Από αυτούς, θα επιλεγεί τυχαία μια πενταμελής επιτροπή. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

$A = \{\text{Η επιτροπή να αποτελείται από τρεις Ευρωπαίους και δυο Αμερικανούς}\}$

$B = \{\text{Η επιτροπή να αποτελείται από τρεις τουλάχιστον Ευρωπαίους}\}$

$\Gamma = \{\text{Η επιτροπή να αποτελείται από επιστήμονες της ίδιας ηπείρου}\}$

$\Delta = \{\text{Στην επιτροπή να αντιπροσωπεύονται και οι δύο ήπειροι}\}$

12. Η Βουλευτής Γ.Χ, έχει πιθανότητα $1/3$ να επιλεγεί στην Επιτροπή Παιδείας και $1/4$ πιθανότητα να επιλεγεί στην Επιτροπή Οικονομικών. Έχει όμως μόνο $1/6$ πιθανότητα να επιλεγεί και στις δυο επιτροπές. Να βρείτε την πιθανότητα να:

(α) να επιλεγεί σε τουλάχιστον μια επιτροπή

(β) επιλεγεί στην Επιτροπή Οικονομικών αλλά όχι στην Επιτροπή Παιδείας

(γ) επιλεγεί το πολύ σε μια ομάδα

(δ) να επιλεγεί ακριβώς σε μία ομάδα.

13. Ένα μικρό καταφύγιο σκύλων φιλοξενεί οκτώ (8) αρσενικούς και έξι (6) θηλυκούς σκύλους. Μια μέρα φτάνει στο καταφύγιο μία φιλόζηη οικογένεια η οποία θέλει να υιοθετήσει τέσσερις (4) σκύλους.

(α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των σκύλων που θα υιοθετήσει η οικογένεια χωρίς κανένα περιορισμό ως προς το φύλο.

(β) Αν η οικογένεια επιλέξει τέσσερις (4) σκύλους στην τύχη, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:

A: «να επιλέξει ακριβώς ένα αρσενικό σκύλο»

B: «να επιλέξει το πολύ ένα θηλυκό σκύλο»

(Παγκύπριες 2019)

14. Δίνεται η λέξη **ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ**.

(α) (i) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(ii) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης που έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.

(β) Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς της λέξης **ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ**, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: «ο αναγραμματισμός να έχει τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις»

B: «ο αναγραμματισμός να μην έχει τα A σε συνεχόμενες θέσεις»

(Παγκύπριες 2019)

15. Με βάση τη συλλογή στοιχείων της Μονάδας Επιδημιολογικής Επιτήρησης του Υπουργείου Υγείας Κύπρου, μέχρι τις 19 Μαΐου 2020, οι αριθμοί των επιβεβαιωμένων κρουσμάτων της νόσου COVID-19 τα οποία, είτε ανέπτυξαν, είτε δεν ανέπτυξαν συμπτώματα της νόσου κατά ηλικιακή ομάδα, παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα.

		ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΩΝ		
		ΝΑΙ	ΟΧΙ	Σύνολο
ΗΛΙΚΙΑ	Κάτω των 30	116	71	187
	30 - 59	349	156	505
	60 και άνω	167	59	226
	Σύνολο	632	286	918

Αν επιλέξουμε στην τύχη, ένα από τα επιβεβαιωμένα κρούσματα της νόσου COVID-19, να βρείτε την πιθανότητα:

- (α) να ανέπτυξε συμπτώματα της νόσου COVID-19
 (β) να ανέπτυξε συμπτώματα της νόσου COVID-19 και να ήταν κάτω από 30 ετών
 (γ) να ανέπτυξε συμπτώματα της νόσου COVID-19 και να μην ήταν κάτω από 30 ετών.

(Παγκύπριες 2020)

16. Σε μία εταιρεία το 20% των εργαζομένων της ανήκει στις ευπαθείς ομάδες, το 60% των εργαζομένων της έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19 και το 15% των εργαζομένων της ανήκει στις ευπαθείς ομάδες και έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα από τους εργαζόμενους της πιο πάνω εταιρείας, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: «να ανήκει στις ευπαθείς ομάδες ή να έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19»

B: «να ανήκει στις ευπαθείς ομάδες και να μην έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19»

Γ: «να μην ανήκει στις ευπαθείς ομάδες και να μην έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19»

(Παγκύπριες 2020)

17. Ένας μαθητής πρόκειται να γίνει συνδρομητής σε μία ιστοσελίδα, στο διαδίκτυο, η οποία παρέχει εξ' αποστάσεων εκπαίδευση. Μεταξύ άλλων θα πρέπει να επιλέξει και ένα κωδικό πρόσβασης, ο οποίος αποτελείται από δέκα χαρακτήρες. Ο σχηματισμός του κωδικού αυτού, πρέπει να συνάδει με τις πιο κάτω προδιαγραφές:

- οι δύο πρώτοι χαρακτήρες πρέπει να είναι οποιαδήποτε 2 διαφορετικά γράμματα από τα 26 μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου
- οι επόμενοι πέντε χαρακτήρες πρέπει να αποτελούνται από όλα τα ψηφία του συνόλου $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ με οποιαδήποτε σειρά
- οι τρεις τελευταίοι χαρακτήρες πρέπει να είναι 3 από τους εξής 5 ειδικούς χαρακτήρες του πληκτρολογίου: @, #, \$, %, &. Οι ειδικοί αυτοί χαρακτήρες μπορούν να επαναλαμβάνονται.

Για παράδειγμα, ένας τέτοιος κωδικός θα μπορούσε να ήταν «bk52134@@&»

(α) Πόσους διαφορετικούς κωδικούς θα μπορούσε να σχηματίσει ο μαθητής αυτός με τις πιο πάνω προδιαγραφές;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός ο μαθητής να επιλέξει ένα κωδικό που να έχει πρώτο γράμμα το m, πρώτο ψηφία το 5 και πρώτο ειδικό χαρακτήρα το @;

(Παγκύπριες 2020)

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1. Δίνονται οι βαθμοί ενός τμήματος Γ΄ Λυκείου στη Λεμεσό, στο μάθημα της Στατιστικής:
12, 14, 16, 20, 12, 19, 18, 13, 18, 15, 6, 15, 17, 18, 8

Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 , Q_3 .

2. Δίνεται το βάρος σε Kg των 9 μαθητριών ενός τμήματος του σχολείου μας:

51, 64, 62, 58, 52, 64, 65, 68, 62

Να υπολογίσετε:

(α) το εύρος του βάρους των μαθητριών,

(β) τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 και Q_3 ,

(γ) το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων και να εξηγήσετε τι εκφράζει στο δείγμα.

3. Να βρείτε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων:

4, 2, 5, 5, 4, 6, 6, 9, 7, 7, 8, 9, 6, 10, 7, 5, 3

και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

4. Είκοσι οικογένειες από τη Λάρνακα, επιλέγηκαν τυχαία και ρωτήθηκαν αναφορικά με τον αριθμό των παιδιών τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον διπλανό πίνακα:

(α) να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 , Q_3 .

(β) να υπολογίσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και να εξηγήσετε τι εκφράζουν στο δείγμα.

Αριθμός παιδιών (x_i)	Αριθμός οικογενειών (f_i)
0	3
1	5
2	6
3	4
4	2

5. Μια εταιρεία εξετάζει τη διάρκεια ζωής δύο ειδών μπαταριών Α και Β. Παίρνει τυχαία 7 μπαταρίες από το κάθε είδος και καταγράφει τις ώρες λειτουργίας τους. Οι ώρες (σε χιλιάδες) φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Είδος Α	22	20	22	26	24	22	18
Είδος Β	24	26	32	24	19	23	20

(α) Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια για τη διάρκεια ζωής των δύο ειδών μπαταριών Α και Β.

(β) Να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των δύο ειδών μπαταριών Α και Β.

6. Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών x και y με βάση τις παρακάτω τιμές:

x	10	13	17	21	25	28	30
y	21	24	29	25	36	33	40

7. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας:

x_i	y_i	$x_i y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	3			
2	6			
5	1			
6	2			
8	8			
9	13			

(α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης των δύο μεταβλητών x_i και y_i .

(β) Να χαρακτηρίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή συσχέτισης των δύο μεταβλητών x_i και y_i .

8. Τα παρακάτω δεδομένα παριστάνουν τους δείκτες ευφυΐας (I.Q.) 10 μητέρων (x) και των θυγατέρων τους (y):

I.Q. μητέρας	I.Q. θυγατέρας
85	90
90	100
95	90
100	105
110	120
115	110
130	130
120	125
135	120

(α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.

(β) Να εκτιμήσετε τον συντελεστή συσχέτισης από το διάγραμμα διασποράς.

(γ) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή συσχέτισης.

9. Επτά σπίτια σε μία γειτονιά στην περιοχή Αγίου Ανδρέα στη Λευκωσία, ρωτήθηκαν πόσα δέντρα έχουν στην αυλή τους και πόσα λίτρα νερού καταναλώνουν καθημερινά για να τα ποτίζουν. Οι απαντήσεις συνοψίζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

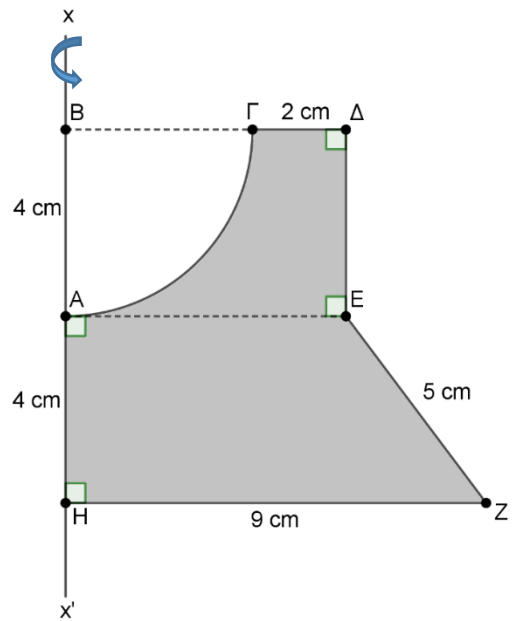
	Αριθμός δέντρων (x)	Λίτρα νερού (y)			
Κατοικία 1	5	24			
Κατοικία 2	7	27			
Κατοικία 3	6	26			
Κατοικία 4	9	35			
Κατοικία 5	7	30			
Κατοικία 6	5	28			
Κατοικία 7	10	40			

- (α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.
 (β) Να υπολογίσετε το γραμμικό συντελεστή συσχέτισης r .
 (γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

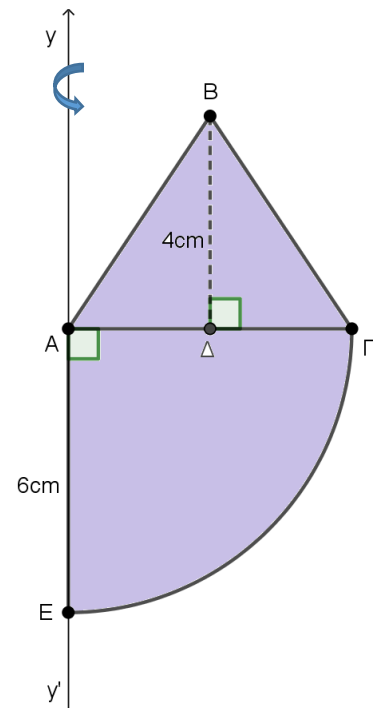
ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

- Δίνεται κύλινδρος με όγκο ίσο με $392\pi \text{ cm}^3$ και ύψος ίσο με 8 cm . Να υπολογίσετε:
 - την ακτίνα του
 - το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.
- Ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με $192\pi \text{ cm}^3$ και το ύψος του είναι τριπλάσιο από την ακτίνα του. Να υπολογίσετε:
 - την ακτίνα και το ύψος του κυλίνδρου
 - το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.
- Δίνεται κώνος με ακτίνα βάσης ίση με 6 cm και ύψος ίσο με 8 cm . Να υπολογίσετε:
 - τη γενέτειρα,
 - το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
 - τον όγκο του κώνου.
- Δίνεται κολουρος κώνος με ακτίνα μεγάλης βάσης διπλάσια από την ακτίνα της μικρής βάσης. Αν το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας είναι ίσο με $60\pi \text{ cm}^2$ και η γενέτειρά του ισούται με 5 cm , να υπολογίσετε:
 - το μήκος της μεγάλης και της μικρής ακτίνας του
 - το ύψος του
 - το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας
 - τον όγκο του.
- Δίνεται κύλινδρος με εμβαδόν κυρτής επιφάνειας ίσο με $70\pi \text{ cm}^2$ και εμβαδόν ολικής επιφάνειας ίσο με $120\pi \text{ cm}^2$. Να βρείτε:
 - την ακτίνα της βάσης
 - το ύψος και
 - τον όγκο του κυλίνδρου.

11. Στο πιο κάτω σχήμα, ο κυκλικός τομέας ΑΓΒ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $BA = 4\text{ cm}$ και το ΑΕΖΗ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $HA = 4\text{ cm}$ και $ZH = 9\text{ cm}$. Αν επιπλέον $\Gamma\Delta = 2\text{ cm}$, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα $x'x$.



12. Στο πιο κάτω σχήμα το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο με ύψος $BD = 4\text{ cm}$. Ο κυκλικός τομέας ΕΑΓ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $AE = 6\text{ cm}$. Το μικτόγραμμο ΑΒΓΕ στρέφεται κατά πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $y'y$. Αφού συμπληρώσετε το σχήμα στο φυλλάδιο, να υπολογίσετε:
- (α) τον εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
 - (β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2025

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΕΜΠΤΗ, 26 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

8:00 – 11:00

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.
Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο
αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.**

**ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

A1 Δίνεται η λέξη: **Α Σ Τ Ε Ρ Ο Μ Α Τ Α**

α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(3 Μονάδες)

β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν από **T** και τελειώνουν σε **P**.

(2 Μονάδες)

A2 Κώνος έχει διάμετρο βάσης 10cm και ύψος 12cm . Να υπολογίσετε:

α) τον όγκο του,

(2 Μονάδες)

β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

(3 Μονάδες)

A3 Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int [x(x^2 - 5x) - 3]dx$$

A4 Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{8}{15}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

α) $P(A \cup B)$

(1,5 Μονάδες)

β) $P(A - B)$

(1,5 Μονάδες)

γ) $P(A|B)$

(2 Μονάδες)

A5 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^4 + 3\alpha^2 x^2 + 5, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο \mathbb{R} για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

A6 Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f''(x) = 12x^2 - 24x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $(1, -7)$.

A7 Το κεντρικό μαθητικό συμβούλιο ενός Λυκείου αποτελείται από τον πρόεδρο, τον αντιπρόεδρο, τον γραμματέα, τον ταμία και τρία μέλη. Από αυτούς πρόκειται να επιλεγούν τρία άτομα για να εκπροσωπήσουν το σχολείο σε ένα συνέδριο της Παγκύπριας Συντονιστικής Επιτροπής Μαθητών (Π.Σ.Ε.Μ.). Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή αυτή αν:

α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, (1,5 Μονάδες)

β) ο πρόεδρος πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στην επιτροπή, (1,5 Μονάδες)

γ) δεν μπορούν να συμπεριληφθούν ταυτόχρονα στην επιτροπή ο αντιπρόεδρος και ο γραμματέας. (2 Μονάδες)

A8 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(x) = (x + 2)(5 - x), \forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (3 Μονάδες)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(26)$ και $f(2025)$, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (2 Μονάδες)

A9 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

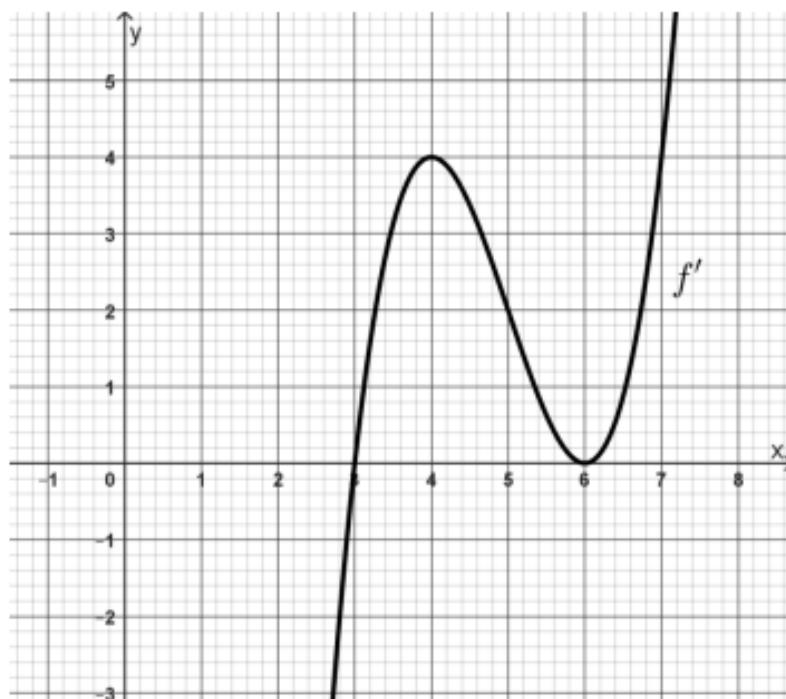
$$f(x) = x(x - \alpha)^2, \quad x \in [-1, +\infty), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1.$$

Η γραφική παράσταση της πιο πάνω συνάρτησης παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α . (2 Μονάδες)

β) Αν $\alpha = 3$, να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα (τοπικά και ολικά) της συνάρτησης f . (3 Μονάδες)

- A10** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3) = 0$. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης f .



- α) i. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f . (2 Μονάδες)
- ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και να το χαρακτηρίσετε. (1 Μονάδα)
- β) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = f(5) \cdot f''(3)$, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (2 Μονάδες)

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

**ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

B1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. (2 Μονάδες)
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:
- τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, (3 Μονάδες)
 - την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, (2 Μονάδες)
 - τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. (1 Μονάδα)
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (2 Μονάδες)

B2 Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μέγιστες ημερήσιες θερμοκρασίες, σε βαθμούς κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), που καταγράφηκαν για 8 μέρες τον Δεκέμβριο του 2024 στον Πρόδρομο και στη Λευκωσία.

Θερμοκρασία στον Πρόδρομο (x)	Θερμοκρασία στη Λευκωσία (y)
2	6
4	4
5	10
6	13
8	10
9	14
10	19
12	20

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. (3 Μονάδες)
- β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. (6 Μονάδες)
- γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών. (1 Μονάδα)

B3 Ο ρυθμός μεταβολής της αξίας ενός καινούργιου αυτοκινήτου δίνεται από τη συνάρτηση:

$$V'(t) = 300(t - 12), \quad 0 < t < 12$$

όπου t είναι η ηλικία του αυτοκινήτου σε χρόνια. Αν η αξία του αυτοκινήτου ένα χρόνο μετά την αγορά του είναι €46550, να βρείτε:

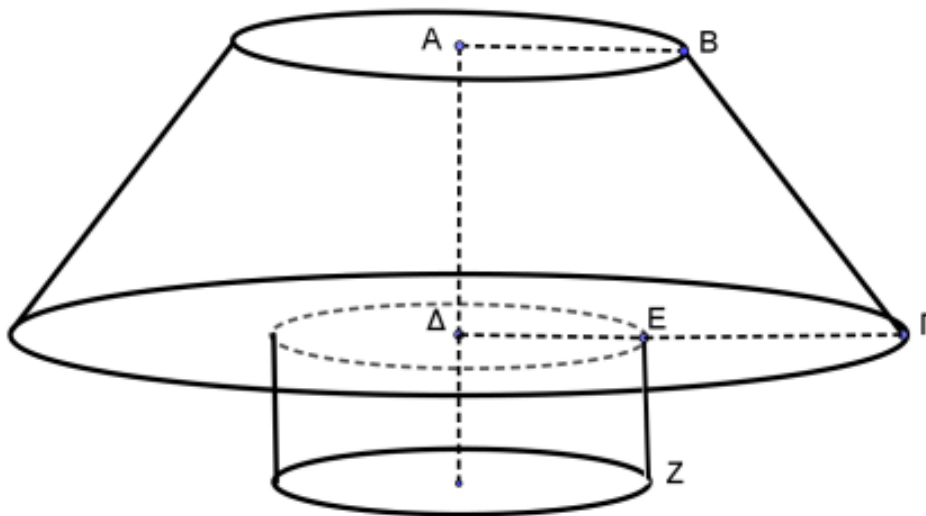
- α) τη συνάρτηση $V(t)$ της αξίας του αυτοκινήτου, (8 Μονάδες)
- β) την αξία του αυτοκινήτου 5 χρόνια μετά την αγορά του. (2 Μονάδες)

B4 Κατά τη θερινή περίοδο προσγειώνονται καθημερινά στα αεροδρόμια Λάρνακας και Πάφου αεροπλάνα σε ποσοστά 60% και 40%, αντίστοιχα. Το 10% των αεροπλάνων που προσγειώνονται στη Λάρνακα και το 4% των αεροπλάνων που προσγειώνονται στην Πάφο, κατά τη θερινή περίοδο, φτάνουν με καθυστέρηση.

Αν μια μέρα της θερινής περιόδου επιλέξουμε τυχαία ένα αεροπλάνο που προσγειώθηκε σε ένα από τα πιο πάνω αεροδρόμια, να υπολογίσετε την πιθανότητα:

- α) το αεροπλάνο να έχει φτάσει με καθυστέρηση, (6 Μονάδες)
- β) το αεροπλάνο να έχει προσγειωθεί στη Λάρνακα, αν γνωρίζουμε ότι έφτασε με καθυστέρηση. (4 Μονάδες)

B5 Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από ένα κύλινδρο και ένα κώλο κώνου. Το κέντρο της μεγάλης βάσης του κώλου κώνου συμπίπτει με το κέντρο Δ της βάσης του κυλίνδρου. Η ακτίνα (ΔΓ) της μεγάλης βάσης του κώλου κώνου είναι διπλάσια από την ακτίνα (ΑΒ) της μικρής βάσης του. Ο όγκος του κώλου κώνου είναι $672\pi \text{ cm}^3$ και το ύψος του ΑΔ είναι ίσο με 8cm. Ο κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης ΔΕ = 5cm και ύψος ΕΖ = 4cm.



- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού. (8 Μονάδες)
- β) Αν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πιο πάνω στερεού είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας, να υπολογίσετε τον όγκο της σφαίρας. (2 Μονάδες)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2024

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 28 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

8:00 – 11:00

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.
Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο
αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.**

**Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία
εργασία.**

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

A1 Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 4x - 12) dx$$

A2 Δίνονται οι ηλικίες οκτώ (8) υπαλλήλων μιας εταιρείας:

36, 37, 32, 30, 34, 30, 37, 40

Να υπολογίσετε:

α) τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3 (3 Μονάδες)

β) το εύρος (R) των πιο πάνω ηλικιών και το ενδοτεταρτημοριακό
εύρος (IQR). (2 Μονάδες)

A3 Δίνεται η λέξη: **Μ Α Ρ Γ Α Ρ Ι Τ Α**

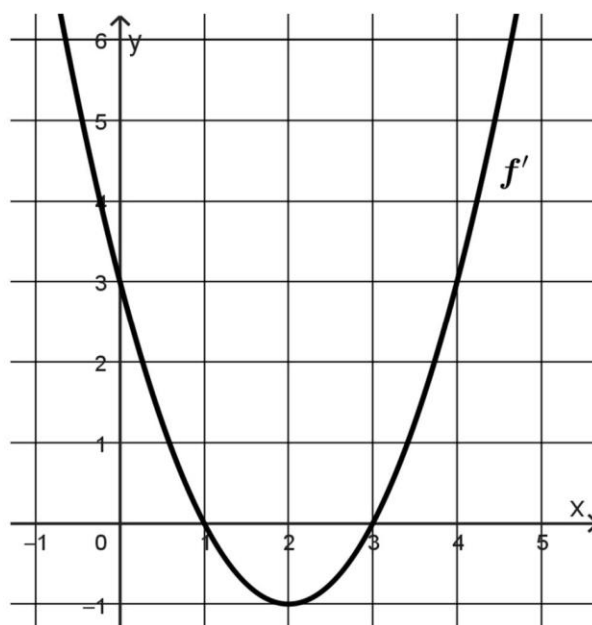
α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. (2 Μονάδες)

β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς περιέχουν τη
λέξη «ΡΙΤΑ». (3 Μονάδες)

A4 Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία $f''(x) = 4x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να
ικανοποιούνται οι συνθήκες $f'(-1) = 0$ και $f(-1) = 1$.

A5 Δίνεται ημισφαίριο όγκου $144 \pi \text{ cm}^3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής
επιφάνειας του ημισφαιρίου.

- A6** Η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^3 + 3x^2 + 2\lambda$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = -2$, την τιμή $f(-2) = 0$.
- α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ . (3 Μονάδες)
 - β) Να χαρακτηρίσετε το είδος του ακροτάτου που παρουσιάζει η συνάρτηση f στο $x = -2$. (2 Μονάδες)
- A7** Από 4 Μαθηματικούς, 2 Φυσικούς και 3 Χημικούς ενός Λυκείου θα επιλεγεί μια πενταμελής ομάδα για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε ένα επιστημονικό συνέδριο Χημείας. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή, αν στην ομάδα:
- α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, (1 Μονάδα)
 - β) θα υπάρχουν ακριβώς δύο Χημικοί, (2 Μονάδες)
 - γ) θα υπάρχει τουλάχιστον ένας Φυσικός και τουλάχιστον ένας Χημικός. (2 Μονάδες)
- A8** Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f .
- α) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f . (2 Μονάδες)
 - β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα. (2 Μονάδες)
 - γ) Να βρείτε για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει σημείο καμπής. (1 Μονάδα)



A9 Δίνονται δυο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με:

$$P(B) = \frac{7}{10}, \quad P(A|B) = \frac{3}{7}, \quad P(A - B) = \frac{1}{5}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- Γ: «να μην πραγματοποιηθεί το B » (1 Μονάδα)
- Δ: «να πραγματοποιηθεί και το A και το B » (1,5 Μονάδες)
- Ε: «να μην πραγματοποιηθεί το A δεδομένου ότι δεν πραγματοποιήθηκε το B » (2,5 Μονάδες)

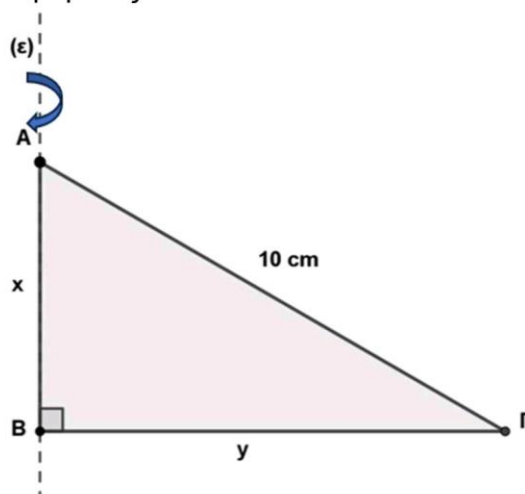
A10 Στο πιο κάτω σχήμα το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$), περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) . Τα σημεία A και B ανήκουν στην ευθεία (ε) . Αν $AB = x$, $B\Gamma = y$ και $A\Gamma = 10 \text{ cm}$:

α) να δείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού δίνεται από τον τύπο

$$V(x) = \frac{\pi}{3}(100x - x^3), \quad 0 < x < 10$$

(1,5 Μονάδες)

β) να βρείτε το μήκος του ύψους του παραγόμενου στερεού, ώστε ο όγκος του να είναι μέγιστος.



(3,5 Μονάδες)

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΥΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

B1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x(x + 3)^2$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. (2 Μονάδες)
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:
- τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, (3 Μονάδες)
 - την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, (2 Μονάδες)
 - τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. (1 Μονάδες)
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (2 Μονάδες)

B2 Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ώρες διαβάσματος οκτώ (8) μαθητών για το διαγώνισμα των Μαθηματικών και ο βαθμός που πήρε ο καθένας στο διαγώνισμα αυτό.

Μαθητής	Ώρες διαβάσματος (x_i)	Βαθμός διαγωνίσματος (y_i)
M1	4	13
M2	6	15
M3	5	13
M4	4	15
M5	10	19
M6	7	17
M7	8	16
M8	4	12

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. (3 Μονάδες)
- β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. (7 Μονάδες)
- B3** Μια δεξαμενή περιέχει νερό όγκου $V = 80 \text{ m}^3$. Όταν υπάρχει ροή νερού από τη δεξαμενή, δηλαδή όταν η δεξαμενή αδειάζει, ο όγκος του νερού στη δεξαμενή είναι συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου δίνεται από τον τύπο:

$$V'(t) = (-2t - 2) \text{ m}^3/\text{h}$$

- α) Να βρείτε τον τύπο για τον όγκο νερού στη δεξαμενή συναρτήσει του χρόνου, $V(t)$. (6 Μονάδες)
- β) Να βρείτε τον όγκο του νερού στη δεξαμενή μετά από δύο ώρες. (2 Μονάδες)
- γ) Να εξετάσετε αν μετά από 10 ώρες θα υπάρχει νερό στη δεξαμενή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (2 Μονάδες)

B4 Σε ένα τραπέζι υπάρχουν ποτήρια γεμάτα πλήρως με χυμό και ένα άδειο κυλινδρικό δοχείο. Το κάθε ποτήρι έχει σχήμα κολουρου κώνου με ύψος $υ_1 = 12 \text{ cm}$ και ακτίνες βάσεων $ρ_1 = 4 \text{ cm}$ και $R_1 = 6 \text{ cm}$, ενώ το κυλινδρικό δοχείο έχει ακτίνα βάσης $R_2 = 16 \text{ cm}$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_k = 3040\pi \text{ cm}^2$. (Τα τοιχώματα και οι βάσεις των ποτηριών και του κυλινδρικού δοχείου θεωρούνται αμελητέου πάχους.)

α) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα (όγκο χυμού) ενός ποτηριού.

(2 Μονάδες)

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα (όγκο) του κυλινδρικού δοχείου.

(4 Μονάδες)

γ) Αδειάζουμε το περιεχόμενο όλων των ποτηριών στο κυλινδρικό δοχείο και η

στάθμη του χυμού φτάνει στα $\frac{4}{5}$ του ύψους του κυλίνδρου. Να υπολογίσετε τον

αριθμό των ποτηριών που υπήρχαν γεμάτα πλήρως με χυμό πάνω στο τραπέζι.

(4 Μονάδες)

B5 Τέσσερις Ιταλοί και δυο Κύπριοι θα παρακολουθήσουν ένα αγώνα του Ευρωπαϊκού πρωταθλήματος ποδοσφαίρου (EURO) σε μια μπυραρία. Η μπυραρία έχει διαθέσιμες τρεις καρέκλες και ένα τετραθέσιο καναπέ, σε σειρά, μπροστά από την τηλεόραση. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα έξι άτομα, αν:

α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός,

(3 Μονάδες)

β) οι δυο Κύπριοι θα καθίσουν στον καναπέ, ο ένας δίπλα στον άλλο,

(3 Μονάδες)

γ) τουλάχιστον ένας Κύπριος θα καθίσει σε καρέκλα.

(4 Μονάδες)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2023

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη 29 Ιουνίου 2023

8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ
ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ ΕΠΙΣΥΝΑΠΤΕΤΑΙ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ, ΠΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ
ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις.

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1 Δίνεται η λέξη: **ΑΠΕΛΕΥΘΕΡΩΣΗ**

- (α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της. **(2 μονάδες)**
(β) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της, που ξεκινούν από Α και τελειώνουν σε Η. **(3 μονάδες)**

A2 (α) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (4x^3 - x^2) dx$$

(2 μονάδες)

- (β) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int (\kappa - 2)x^\lambda dx = 2x^3 + c$$

(3 μονάδες)

A3 Σε μια οφθαλμολογική κλινική νοσηλεύονται 52 άτομα που πάσχουν από καταρράκτη, 35 άτομα που πάσχουν από γλαύκωμα και 12 άτομα που πάσχουν και από τις δύο ασθένειες. Να βρείτε πόσοι ασθενείς σε αυτή την κλινική:

- (α) πάσχουν από τουλάχιστον μία από τις δύο ασθένειες
(β) πάσχουν από καταρράκτη, αλλά όχι από γλαύκωμα

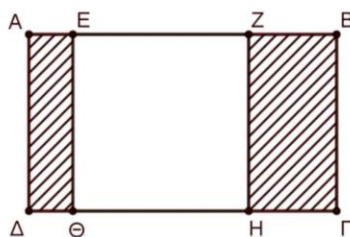
- A4** (α) Να δώσετε τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης. (2 μονάδες)
- (β) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης, να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = -2x + 7$, είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . (3 μονάδες)

- A5** Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον χρόνο υπερωριών, σε ώρες, 25 εργαζομένων ενός εργοστασίου, τον περασμένο μήνα.

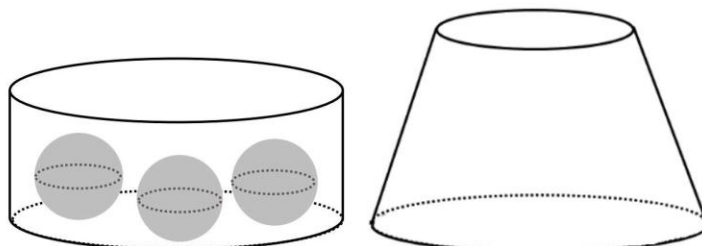
Χρόνος υπερωριών (σε ώρες)	0	1	2	3	4	5
Αρ. εργαζομένων	3	8	6	4	2	2

Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 , Q_3 , το ενδοτεταρτημοριακό εύρος IQR και το εύρος R των πιο πάνω παρατηρήσεων.

- A6** Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, με πλευρές $AD = x$ και $AB = y$, το οποίο έχει σταθερή περίμετρο ίση με 16 m . Μέσα σε αυτό, βρίσκεται τετράγωνο $EZH\Theta$, του οποίου η πλευρά EZ βρίσκεται πάνω στην πλευρά AB και η πλευρά ΘH πάνω στην πλευρά $\Delta\Gamma$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.
- (α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου δίνεται από τον τύπο $E(x) = -2x^2 + 8x$. (2 μονάδες)
- (β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία μεγιστοποιείται το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν. (3 μονάδες)



- A7** Στο πιο κάτω σχήμα, υπάρχει ένα κυλινδρικό δοχείο, ανοικτό στο πάνω μέρος, με ακτίνα βάσης 8 cm και ύψος 6 cm . Μέσα σε αυτό υπάρχουν 3 σφαίρες ακτίνας 2 cm η κάθε μία. Δίπλα του υπάρχει ένα δοχείο, σε σχήμα κώλου, ανοικτό στο πάνω μέρος, γεμάτο με νερό. Το δοχείο έχει ακτίνα μεγάλης βάσης 8 cm , ακτίνα μικρής βάσης 4 cm και ύψος 8 cm . Αν αδειάσουμε το νερό που υπάρχει στο δοχείο σχήματος κώλου, μέσα στο κυλινδρικό δοχείο, να διερευνήσετε αν αυτό θα υπερχειλίσει ή όχι. Να δικαιολογήσετε με μαθηματικούς υπολογισμούς την απάντησή σας.



A8 Για την πολυωνυμική συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , ισχύει ότι:

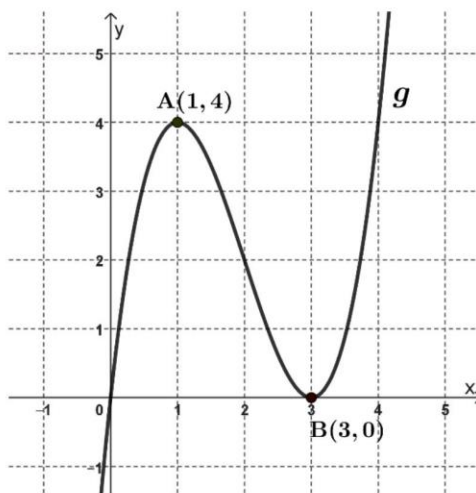
$$f''(x) = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- (α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητά της. **(1 μονάδα)**
- (β) Αν ισχύει ότι $f'(1) = 8$, να βρείτε την τετμημένη του σημείου στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. **(2 μονάδες)**
- (γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $(0,1)$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . **(2 μονάδες)**

A9 Η θεατρική ομάδα ενός Λυκείου αποτελείται από 10 μαθητές και 6 μαθήτριες. Η θεατρική ομάδα πρόκειται να ανεβάσει επί σκηνής ένα θεατρικό έργο, το οποίο απαιτεί 6 διαφορετικούς αντρικούς και 2 διαφορετικούς γυναικίους ρόλους. Όλοι οι μαθητές και όλες οι μαθήτριες της θεατρικής ομάδας είναι διαθέσιμοι να αναλάβουν ρόλο.

- (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των ηθοποιών, αν οι μαθητές υποδυθούν αντρικούς και οι μαθήτριες γυναικίους ρόλους; **(2 μονάδες)**
- (β) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των ηθοποιών, αν οι μαθητές υποδυθούν αντρικούς και οι μαθήτριες γυναικίους ρόλους, αλλά ένας συγκεκριμένος μαθητής, αν επιλεγεί, μπορεί να υποδυθεί μόνο ένα συγκεκριμένο αντρικό ρόλο; **(3 μονάδες)**

A10 Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης g . Τα σημεία $A(1,4)$ και $B(3,0)$ είναι τοπικά ακρότατα της g .



- (α) Αν $\int F(x)dx = g(x) + c$, να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης F με τον άξονα των x , δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.
- (β) Αν $\int g(x)dx = G'(x) + c$, να βρείτε την τιμή του x , για την οποία η συνάρτηση G παρουσιάζει σημεία καμπής, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

ΤΕΛΟΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ – ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 ασκήσεις.

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. **(2 μονάδες)**
- (β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:
- τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα **(5 μονάδες)**
 - τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της **(1 μονάδες)**
- (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . **(2 μονάδες)**

B2 Στον πιο κάτω πίνακα, δίνεται η ηλικία 6 ηλεκτρονικών υπολογιστών, σε χρόνια, και ο αριθμός των επισκευών που έγιναν, για τον καθένα, μέχρι σήμερα.

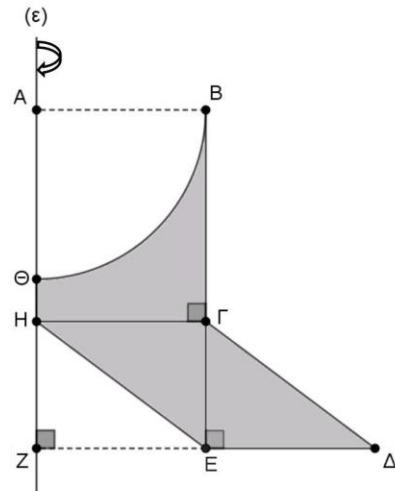
Η.Υ.	Ηλικία Η.Υ. (x_i)	Αρ. επισκευών (y_i)
1	2	4
2	3	6
3	4	8
4	5	10
5	6	11
6	4	9

- (α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. **(3 μονάδες)**
- (β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. **(6 μονάδες)**
- (γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ της ηλικίας των υπολογιστών και του αριθμού των επισκευών που έγιναν για τον καθένα μέχρι σήμερα. **(1 μονάδα)**

B3 Η συνάρτηση $\Pi(t)$ υπολογίζει, συναρτήσει του χρόνου t , σε χρόνια, τον πληθυσμό μιας χώρας, σε εκατομμύρια, για τα επόμενα 25 χρόνια. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού, δίνεται από τη σχέση $\Pi'(t) = -\frac{1}{10}t + 2$, $t \in [0,25]$.

- (α) Αν σήμερα ($t = 0$) ο πληθυσμός της χώρας είναι 30 εκατομμύρια, να αποδείξετε ότι $\Pi(t) = -\frac{t^2}{20} + 2t + 30$, $t \in [0,25]$. **(4 μονάδες)**
- (β) Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός αναμένεται να είναι 45 εκατομμύρια; **(3 μονάδες)**
- (γ) Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός θα αρχίσει να μειώνεται; **(3 μονάδες)**

- B4** Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο $HΓΔΖ$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $HΓ \parallel ΖΔ$, $HΓ = 4 \text{ cm}$, $ZΔ = 8 \text{ cm}$ και $ZH = 3 \text{ cm}$. Το τετράπλευρο $ΑΒΓΗ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με $BΓ = 5 \text{ cm}$. Με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $ΑΒ$ γράφουμε το τόξο $BΘ$. Το σκιασμένο χωρίο $BΓΔΕΗΘΒ$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $(ε)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



- B5** Ο προσωπικός μυστικός κωδικός εισόδου, ενός πελάτη μιας τράπεζας, στην ηλεκτρονική ιστοσελίδα της, είναι ένας εξαψήφιος αριθμός, που σχηματίζεται με τα ψηφία 0 έως 9. Τα ψηφία αυτά μπορούν να επαναλαμβάνονται και να βρίσκονται σε οποιαδήποτε από τις έξι θέσεις του αριθμού. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 099824, 002377, 125760, 000000, 000023, 777766 μπορεί να είναι προσωπικοί κωδικοί εισόδου, πελατών της τράπεζας αυτής, στην ηλεκτρονική της ιστοσελίδα.

- (α) Να βρείτε πόσοι το πολύ προσωπικοί μυστικοί κωδικοί εισόδου μπορούν να σχηματιστούν.

(2 μονάδες)

- (β) Αν ένας πελάτης ξέχασε τον ακριβή προσωπικό μυστικό κωδικό του, αλλά θυμάται ότι αρχίζει ή με το ψηφίο 5 ή με το ψηφίο 6 και είναι άρτιος, ποια είναι η πιθανότητα να σχηματίσει τον αριθμό αυτό με την πρώτη προσπάθεια;

(3 μονάδες)

- (γ) Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης της τράπεζας αυτής να έχει προσωπικό μυστικό κωδικό, του οποίου τα ψηφία είναι διαδοχικά και σε φθίνουσα διάταξη;

(3 μονάδες)

- (δ) Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης της τράπεζας αυτής να έχει προσωπικό μυστικό κωδικό, του οποίου όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά, περιέχει τα ψηφία 5 και 9 και το ψηφίο 9 προηγείται του ψηφίου 5;

(2 μονάδες)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2022

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.
Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο
αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int (x^3 + 3x^2 - 4x + 5)dx$.

A2. Δίνεται ο αριθμός των λίτρων νερού που καταναλώνουν 9 υπάλληλοι μιας εταιρείας σε μία βδομάδα:

15, 20, 15, 22, 17, 21, 18, 20, 21

(α) Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3 . **(3 μον.)**

(β) Να υπολογίσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων. **(2 μον.)**

A3. Να υπολογίσετε πόσους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία του συνόλου

$$A = \{0,1,2,4,5,6,8\},$$

αν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου.

A4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 - 9x + 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$.

Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β , αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 3$ και σημείο καμπής στο $x = 1$.

- A5.** Το κέρδος P από την μηνιαία πώληση x τόνων ενός προϊόντος, σε χιλιάδες ευρώ, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$P(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{8}{5}x - 3, \quad 4 < x < 28$$

Να υπολογίσετε:

- (α) την μηνιαία πώληση σε τόνους, ώστε το κέρδος P να είναι το μέγιστο δυνατό, **(3 μον.)**
 (β) το μέγιστο δυνατό κέρδος.

(2 μον.)

- A6.** Γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι θα καθίσουν 10 άτομα, μεταξύ των οποίων βρίσκονται ο Μάριος, η Έλενα και η μητέρα τους Γεωργία. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν τα 10 άτομα αν:

- (α) δεν υπάρχει περιορισμός,
 (β) μεταξύ του Μάριου και της Έλενας θα κάθεται η μητέρα τους Γεωργία.

- A7.** Ένας κώνος έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας διπλάσιο του εμβαδού της βάσης του. Αν το ύψος του είναι $4\sqrt{3} \text{ cm}$, να υπολογίσετε τον όγκο του.

- A8.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 20$, $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f και να τα χαρακτηρίσετε.

(3 μον.)

- (β) Να βρείτε την ολικά μέγιστη και ολικά ελάχιστη τιμή της f στο διάστημα $[-2,3]$.

(2 μον.)

- A9.** Δίνεται η λέξη ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ.

- (α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

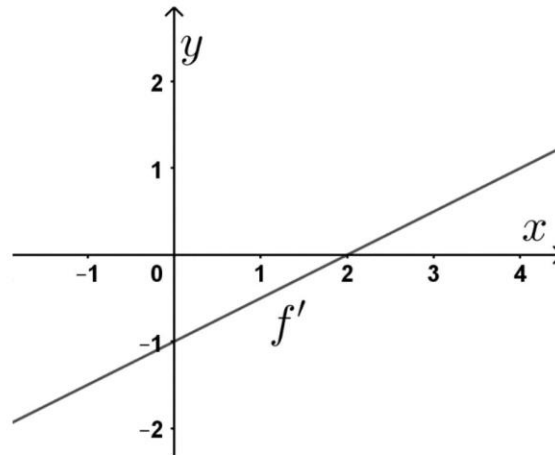
(2 μον.)

- (β) Πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:

- i. έχουν τα φωνήεντα συνεχόμενα;
 ii. αρχίζουν με τη λέξη ΝΕΑ και περιέχουν τη λέξη ΓΗ;

(3 μον.)

- A10.** Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται μια ευθεία που είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου (f') μιας συνάρτησης f .



- (α) Να βρείτε τα διαστήματα μονotonίας της f . **(2 μον.)**
- (β) Να βρείτε τη θέση του τοπικού ακροτάτου της f και να το χαρακτηρίσετε. **(1 μον.)**
- (γ) Να βρείτε τον τύπο της f , αν η γραφική παράσταση της f περνά από το σημείο $M\left(1, \frac{1}{4}\right)$. **(2 μον.)**

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α'
ΑΚΟΥΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β'

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. **(2 μον.)**

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς:

i. την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, **(3 μον.)**

ii. την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, **(2 μον.)**

iii. τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. **(1 μον.)**

(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. **(2 μον.)**

B2. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα χρήματα, σε ευρώ, που ξόδεψαν δύο παιδιά στις οκτώ μέρες των διακοπών τους.

Ημέρα	Παιδί (x_i)	Παιδί (y_i)
1 ^η	19	18
2 ^η	19	16
3 ^η	17	18
4 ^η	14	13
5 ^η	13	14
6 ^η	20	18
7 ^η	11	10
8 ^η	15	13

(α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. **(3 μον.)**

(β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. **(6 μον.)**

(γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών. **(1 μον.)**

B3. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 20 μπάλες, αριθμημένες από το 1 μέχρι το 20.

(α) Παίρνουμε 5 μπάλες από το δοχείο, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή αν:

i. δεν υπάρχει περιορισμός,

ii. πάρουμε μόνο μπάλες με άρτιο αριθμό,

iii. πάρουμε το πολύ 2 μπάλες με άρτιο αριθμό,

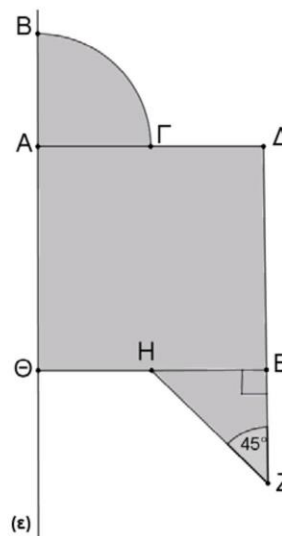
iv. πάρουμε τις μπάλες με τους αριθμούς 10 και 19 και όχι την μπάλα με τον αριθμό 1.

(8 μον.)

(β) Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε 7 μπάλες από το δοχείο, 3 μπάλες με άρτιο αριθμό και 4 μπάλες με περιττό αριθμό και να τις τοποθετήσουμε σε σειρά, έτσι ώστε οι μπάλες με περιττό αριθμό και οι μπάλες με άρτιο αριθμό να είναι εναλλάξ.

(2 μον.)

- B4.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο $AΔΕΘ$. Με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $AΓ = 2\text{cm}$, γράφουμε τόξο $BΓ$ έξω από το $AΔΕΘ$. Τα σημεία $Γ$ και H είναι τα μέσα των πλευρών $AΔ$ και $ΘE$ αντίστοιχα. Το τρίγωνο HEZ είναι ορθογώνιο με $H\hat{E}Z = 90^\circ$ και $E\hat{Z}H = 45^\circ$.

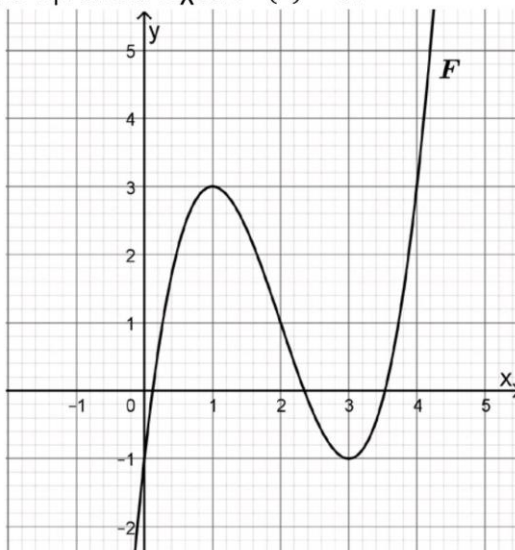


Το σκιασμένο χωρίο $(BΓΔZHΘB)$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ϵ) .

Να υπολογίσετε:

- (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και **(6 μον.)**
- (β) τον όγκο του στερεού που παράγεται. **(4 μον.)**

- B5.** Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της τρίτου βαθμού πολυωνυμικής συνάρτησης F για την οποία ισχύει $F''(2) = 0$.



- (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση F :
- i. ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατά της **(3 μον.)**
 - ii. ως προς την κυρτότητα και το σημείο καμπής της. **(3 μον.)**
- (β) Αν ισχύει ότι $\int f(x)dx = F(x) + c$,
- i. να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τη θέση του τοπικού ακρότατού της και να το χαρακτηρίσετε, **(3 μον.)**
 - ii. να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής την συνάρτηση f . **(1 μον.)**

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Σάββατο 12/06/2021, 08:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο
το οποίο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.
Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int (2x^3 - 2x + 1)dx$

A2. Δίνεται ο αριθμός των ημερών με άδεια ασθενείας 14 υπαλλήλων μιας εταιρείας σε ένα έτος:

0, 3, 7, 5, 15, 0, 8, 7, 10, 0, 3, 5, 8, 5

Να βρείτε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των πιο πάνω παρατηρήσεων.

A3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f με τύπο:

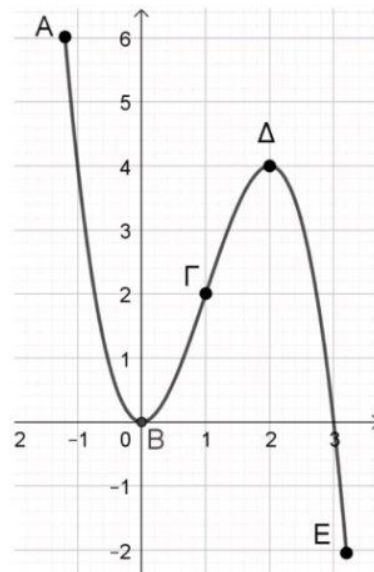
$$f(x) = x^2 - 4x, x \in \mathcal{R}$$

- A4.** (α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΦΙΛΟΤΙΜΟ**.
(3 μονάδες)
- (β) Πόσοι από τους αναγραμματισμούς αυτούς έχουν τα σύμφωνα συνεχόμενα;
(2 μονάδες)

- A5.** Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: [-1, 2, 3, 2] \rightarrow \mathcal{R}$ η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής στο Γ.

Από την γραφική παράσταση να βρείτε:

- (α) Τα ακρότατα της συνάρτησης (τοπικά και ολικά) και να τα χαρακτηρίσετε.
(2 μονάδες)
- (β) Το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι κυρτή.
(1 μονάδα)
- (γ) Το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.
(1 μονάδα)
- (δ) Την τιμή της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο Γ.
(1 μονάδα)



- A6.** Δώδεκα (12) λύκεια της Κύπρου συμμετέχουν σε ένα διαγωνισμό δημιουργικότητας.
- (α) Τα λύκεια που διακρίνονται στις τρεις πρώτες θέσεις βραβεύονται με χρυσό, αργυρό και χάλκινο έπαθλο. Πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί τρόποι απονομής των βραβείων ανάμεσα στα 12 λύκεια;
- (β) Από τα υπόλοιπα λύκεια που δεν διακρίνονται στις τρεις πρώτες θέσεις, θα επιλεγεί μια ομάδα τριών λυκείων για να λάβουν μέρος σε ένα συνέδριο. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή;
- A7.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 2$ η οποία παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο με $x = 1$ και σημείο καμπής για $x = 0$. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

- A8.** Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει :

$$P(A) = \frac{3}{8}, \quad P(B) = \frac{5}{8} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

- (α) $P(A \cap B)$ (2 μονάδες)
 (β) $P(B/A)$ (1,5 μονάδα)
 (γ) $P(B \cap A')$ (1,5 μονάδα)
- A9.** Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) = 6x - 12, \forall x \in \mathcal{R}$.
- (α) Να βρείτε τη συνάρτηση f αν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(4, -12)$. (3 μονάδες)
 (β) Να χαρακτηρίσετε το τοπικό ακρότατο στο σημείο A . (2 μονάδες)
- A10.** Σε έρευνα ερωτήθηκαν 200 ψηφοφόροι για την ηλικία τους και την προτίμησή τους μεταξύ δυο υποψηφίων στις τελευταίες βουλευτικές εκλογές. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

	18-25 ετών	26-39 ετών	40 ετών και άνω	Σύνολο
Υποψήφιος Α	40	22	15	77
Υποψήφιος Β	50	46	10	106
Καμιά προτίμηση	10	4	3	17
Σύνολο	100	72	28	200

Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα.

- (α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου το άτομο να βρίσκεται στην ηλικιακή ομάδα «26-39 ετών». (1 μονάδα)

- (β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου το άτομο να προτιμά τον υποψήφιο Β, αν γνωρίζουμε ότι είναι 40 ετών και άνω.

(1 μονάδα)

- (γ) Να εξετάσετε αν είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα:

Γ: «Το άτομο είναι 26 ετών και άνω και προτιμά τον υποψήφιο Α»

Δ: «Το άτομο είναι κάτω των 40 ετών και προτιμά τον υποψήφιο Α»

(3 μονάδες)

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -4x^3 + 6x^2$. Να κάνετε την γραφική της παράσταση αφού πρώτα βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής καθώς και τη συμπεριφορά στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

B2. Η ημερήσια παραγωγή αντισωμάτων στον οργανισμό μετά τη λήψη ενός εμβολίου δίνεται από τη συνάρτηση $A(t)$, όπου t είναι ο χρόνος σε ημέρες από τη λήψη του εμβολίου. Δέκα (10) ημέρες μετά τη χορήγηση του εμβολίου η παραγωγή των αντισωμάτων στον οργανισμό φτάνει στις 125 μονάδες.

$$\text{Δίνεται } A'(t) = 15 - \frac{t}{2}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $A(t)$ δίνεται από τον τύπο,
$$A(t) = -\frac{t^2}{4} + 15t \quad (5 \text{ μονάδες})$$

(β) Πόσες ημέρες μετά τη χορήγηση του εμβολίου παρατηρείται η μεγαλύτερη ημερήσια παραγωγή αντισωμάτων στον οργανισμό;
(3 μονάδες)

(γ) Να βρείτε τη μεγαλύτερη ημερήσια παραγωγή μονάδων αντισωμάτων στον οργανισμό μετά τη χορήγηση του εμβολίου.
(2 μονάδες)

B3. Πέντε άτομα συναντώνται στο ισόγειο μιας πολυκατοικίας και μπαίνουν στον ανελκυστήρα για να ανεβούν σε ένα από τους επτά ορόφους της. Να βρείτε:

(α) Πόσες χειραψίες μπορούν να ανταλλάξουν κατά τη συνάντησή τους; (όλοι ανταλλάσσουν χειραψίες μια μόνο φορά με τον κάθε ένα)
(3 μονάδες)

(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα πέντε άτομα να κατέβουν από τον ανελκυστήρα αν:
(4 μονάδες)

i. Κάθε άτομο θα κατέβει σε διαφορετικό όροφο.

ii. Κάθε άτομο μπορεί να κατέβει σε οποιοδήποτε όροφο.

(γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα δύο (2) τουλάχιστον άτομα να κατέβουν στον ίδιο όροφο.
(3 Μονάδες)

- B4.** Το κόστος της μηνιαίας παραγωγής x τόνων χαλουμιού ενός εργοστασίου σε ευρώ είναι:

$$K(x) = -x^2 + 2000x + 1000, \quad 1 \leq x \leq 1000$$

Η τιμή πώλησης ανά τόνο δίνεται από τη σχέση $(-5x + 6000)$ ευρώ.

- (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση του μηνιαίου κέρδους από την πώληση x τόνων χαλουμιού δίνεται από τη σχέση, (4 μονάδες)

$$P(x) = -4x^2 + 4000x - 1000$$

- (β) Ποια πρέπει να είναι η μηνιαία παραγωγή ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο. (4 μονάδες)
- (γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο κέρδος. (2 μονάδες)

- B5.** Σε ένα γραφείο δύο υπολογιστές Α και Β εκτυπώνουν στον ίδιο εκτυπωτή. Το 70% των εκτυπώσεων προέρχεται από τον υπολογιστή Α και το υπόλοιπο από τον Β. Σε κείμενα που ξεπερνούν τις 30 σελίδες, η πιθανότητα να γίνει διακοπή στην εκτύπωση είναι 1% για τα κείμενα που προέρχονται από τον υπολογιστή Α, και 2% για αυτά που προέρχονται από τον Β.

Εκτυπώνεται ένα κείμενο άνω των 30 σελίδων.

- (α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να γίνει διακοπή κατά την εκτύπωση του κειμένου. (6 μονάδες)
- (β) Αν έχει γίνει διακοπή κατά την εκτύπωση, να υπολογίσετε την πιθανότητα το κείμενο να προέρχεται από τον υπολογιστή Β. (4 μονάδες)

ΤΕΛΟΣ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ

1. Στατιστική

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{ή} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2},$$

$$\text{όπου } n = \sum_{i=1}^k f_i$$

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - n\bar{x}\bar{y}}{nS_x S_y}, \text{ όπου } \Sigma_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = \epsilon\phi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	Σε ακτίνια
$\eta_{\mu x} = \eta_{\mu \alpha}$	$x = 360^\circ \kappa + \alpha$ ή $x = 360^\circ \kappa + 180^\circ - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi \kappa + \alpha$ ή $x = 2\pi \kappa + \pi - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma_{\nu \nu x} = \sigma_{\nu \nu \alpha}$	$x = 360^\circ \kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi \kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\epsilon_{\phi x} = \epsilon_{\phi \alpha}$	$x = 180^\circ \kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = \pi \kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = E_{\beta} \cdot \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2\pi R \upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho) \lambda$	$V = \frac{\pi \upsilon}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$$

Εστίες $(\pm \gamma, 0)$, Διευθετούσες $x = \pm \frac{\alpha}{\epsilon}$,

Εκκεντρότητα $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \quad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x \quad (\epsilon\varphi x)' = \tau\epsilon\mu^2 x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Ολοκληρώματα

$$\int \tau\epsilon\mu x \, dx = \ln|\tau\epsilon\mu x + \epsilon\varphi x| + c \quad \int \sigma\tau\epsilon\mu x \, dx = \ln\left|\epsilon\varphi \frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau\omicron\xi\eta\mu \frac{x}{\alpha} + c \quad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \tau\omicron\xi\epsilon\varphi \frac{x}{\alpha} + c$$

7. Απλός Τόκος

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$$