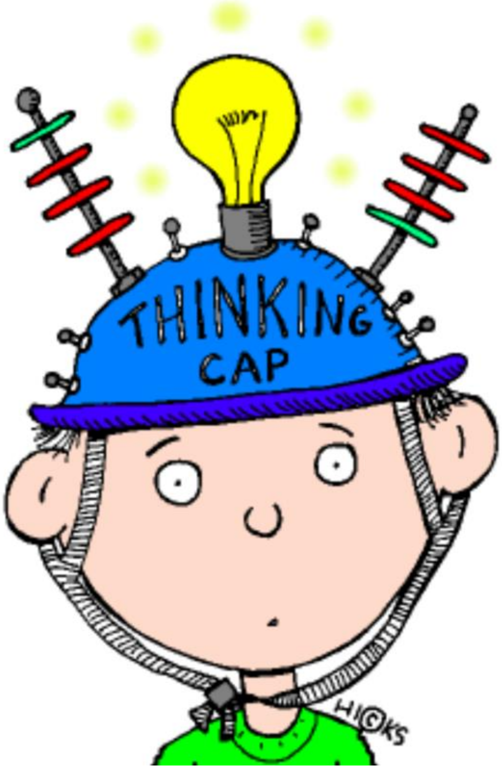
ΛΥΚΕΙΟ ΑΡΧ. ΜΑΚΑΡΙΟΥ Γ’ - ΔΑΣΟΥΠΟΛΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2025 – 26



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΥΛΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Α΄ ΚΑΙ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΝΙΑΙΕΣ ΚΑΙ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

1. Στατιστική

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2}{\nu}} \quad \text{ή} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu} f_i x_i^2}{\nu} - \bar{x}^2}, \quad \text{όπου } \nu = \sum_{i=1}^{\nu} f_i$$

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y}, \text{ όπου } \Sigma_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_\nu y_\nu$$

2. Τριγωνομετρία

$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A\sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A\eta\mu B$, $\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A\eta\mu B$

$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha-\beta) + \eta\mu(\alpha+\beta)$, $2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$

$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$, $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad t = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \quad , \quad \eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu\frac{B-A}{2}\cdot\eta\mu\frac{A+B}{2}$$

3. Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	Σε ακτίνια
ημx = ημα	$x=360^0\kappa+\alpha$ ή $x=360^0\kappa+180-\alpha$, $\kappa\in Z$	$x=2\pi\kappa+\alpha$ ή $x=2\pi\kappa+\pi-\alpha$, $\kappa\in Z$
συνx = συνα	$x=360^0\kappa\pm\alpha$, $\kappa\in Z$	$x=2\pi\kappa\pm\alpha$, $\kappa\in Z$
εφx = εφα	$x=180^0\kappa+\alpha$, $\kappa\in Z$	$x=\pi\kappa+\alpha$, $\kappa\in Z$

4. Στερεομετρία

Ορθό πρίσμα	$\mathrm{E}_{\Pi} = \Pi_{\beta}.\upsilon$	$\mathrm{V} = \mathrm{E}_{\beta}.\upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$\mathrm{E}_{\Pi} = \frac{1}{2}\Pi_{\beta}.h$	$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{E}_{\beta}.\upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$\mathrm{E}_{\kappa} = 2\pi \mathrm{R}\upsilon$	$V = \pi \mathrm{R}^2\upsilon$
Κώνος	$\mathrm{E}_{\kappa} = \pi \mathrm{R}\lambda$	$\mathrm{V} = \frac{\pi R^2\upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$\mathrm{E}_{\kappa} = \pi(\mathrm{R}+\rho)\lambda$	$\mathrm{V} = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$\mathrm{E} = 4\pi \mathrm{R}^2$	$\mathrm{V} = \frac{4\pi \mathrm{R}^3}{3}$

5. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων Α(x_1,y_1) και Β(x_2,y_2) : $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου Α(x_1,y_1) από την ευθεία Αx+Βy+Γ=0 : $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$

Έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, $\alpha > \beta$.

Εστίες: ($\pm$ γ,0), Διευθετούσες: $x = \pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$, Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$.

6. Παράγωγοι

(u.v)΄ = u΄.v + u.v΄ , $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

(ημx)΄ = συνx , (συνx)΄ = -ημx , (εφx)΄ = τεμ²x , (lnx)΄ = $\frac{1}{x}$

7. Ολοκληρώματα

$\int \tau\varepsilon\mu x dx = \ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\phi x|$ + c

$\int \sigma\tau\varepsilon\mu x dx = \ln\left|\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right|$ + c

$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau o\xi\eta\mu\frac{x}{\alpha}$ + c

$\int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha}\tau o\xi\varepsilon\phi\frac{x}{\alpha}$ + c

Απλός τόκος $\mathrm{T} = \frac{\mathrm{KEX}}{100}$

ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-e^{-x}}{x^2+3}$ (β) $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x$

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$ (δ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-e^x\text{εφ}x}{3\ln(x+1)}$

(ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\ln x-e^x)$ (ζ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln x-e^x}{2e^x-\ln x}$

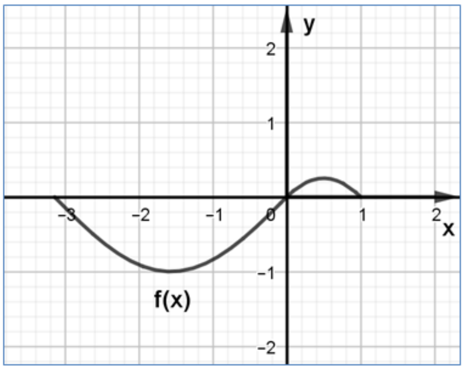
(η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$ (θ) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2\text{ημ}x+\text{ημ}^2x}{x-x\text{συν}x}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x\text{συν}x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(β) Υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\text{σφ}\xi=\xi$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\text{ημ}x, & x\le0\\ \alpha x^2+\beta x, & x>0\end{cases}$.



(α) Να βρείτε τις τιμές $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-\pi,1]$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του $\xi\in(-\pi,1)$ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος.

(γ) Να χρησιμοποιήσετε το διπλανό γράφημα για να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος.

4. (α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να γράψετε τη γεωμετρική σημασία του.

(β) Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3, & x<1\\ 8x-2x^2, & x\ge1\end{cases}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[-3,3]$.

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^3+9x^2+12x+\alpha=0$, $4<\alpha<5$, έχει ακριβώς μιά ρίζα στο διάστημα $(-2,-1)$.

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και ισχύει ότι $f(2)-f(1)=3$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=2x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha\beta<0$ και για την οποία ισχύει ότι $f(\alpha)=f(\beta)=f(0)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$f''(\xi)=0$$

8. (α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

(β) Να βρείτε κατάλληλο $\xi \in (5,10)$ για το οποίο ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}, x \in [5,10]$.

9. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - x$.Να βρείτε τον αριθμό $\xi \in (1, e)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και να δείξετε ότι:

$$1 < e^{\frac{1}{e-1}} < e$$

(β) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = x\ln x$, να δείξετε ότι αν $0 < \alpha < \beta$, τότε:

$$1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < \frac{\beta}{\alpha} - 1$$

10. Δίνεται η καμπύλη $y = \frac{1+2\ln x}{x^2}$. Να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

(α) Να δείξετε ότι έχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο στο σημείο $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e}\right)$.

(β) Να δείξετε ότι $e^{x^2} \geq x^{2e}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

(γ) Αν $0 < \kappa < \lambda < \sqrt{e}$, να δείξετε ότι $\kappa^{\lambda^2} < \lambda^{\kappa^2}$.

12. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 3x^4 + 4\alpha x^3 + 6\alpha^2 x^2, \alpha \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι δεν έχει σημεία καμπής.

(β) Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$[f(x)]^3 + [f(x)]^2 + 8f(x) = 3e^{-x} - 4e^{2x} - 5x + 3$$

Να αποδείξετε ότι δεν έχει τοπικά ακρότατα.

13. (α) Να δώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης και οριζόντιας ασύμπτωτης

(β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i) $y = \frac{2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ (ii) $y = \frac{x^2 - 4x - 5}{2x - 5}$ (iii) $y = \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

(iv) $y = \frac{\ln(x-1)}{x-3}$ (v) $y = \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1}$ (vi) $y = \frac{\ln(2-x)}{1 - e^{-x}}$

14. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας , τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

(α) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2 - x - 2}$ (β) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ (γ) $y = (1-x)^2 e^{-x}$

15. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα κυρτότητας, **τα σημεία καμπής** και τις ασύμπτωτες, να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x}$$

16. Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{3x^2+2x+1}{x+2}$ (β) $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$

17. Έστω ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ, αν γνωρίζουμε ότι ισχύει:

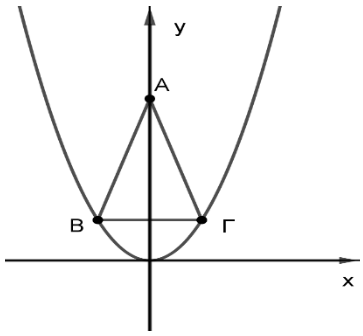
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$$

18. Η συνάρτηση:

$$y = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x + \lambda}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$$

έχει ακρότατο στο $(1, -1)$ και πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x + 1$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$.

19. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή $y = x^2$ και το σημείο $A(0,12)$. Κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma, (AB) = (B\Gamma)$ όπου οι κορυφές B και Γ είναι σημεία της παραβολής και η πλευρά $B\Gamma$ παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων B και Γ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να γίνεται μέγιστο.



20. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma = 8cm$ και ύψος $A\Delta = 6cm$. Εγγράφουμε σ ’αυτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο . Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το εμβαδόν του να είναι μέγιστο.

21. Η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + \ln f(x) = 1 + x^2$$

Να δείξετε ότι:

(α) για $x = 0$, η συνάρτηση έχει ελάχιστο

(β) η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα πάνω στο $\mathbb{R}$.

22. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x, \frac{1}{e} \le x \le e$$

Να βρείτε το ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο της συνάρτησης.

23. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $2f(4) = f(2) + f(6)$. Να δείξετε ότι η f' δεν είναι $1 - 1$ συνάρτηση και ότι η $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση.

24. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \Delta \to (0, +\infty)$.

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln(f(x))$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, αν και μόνον αν, ισχύει $f(x)f''(x) \geq (f'(x))^2$.

(β) Να βρείτε το μέγιστο διάστημα, στο οποίο η συνάρτηση $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

25. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου που πρέπει να εγγραφεί σε ημικύκλιο ακτίνας R, ώστε να έχει μέγιστο εμβαδόν.

26. Να υπολογίσετε το μήκος του τετραγώνου που πρέπει να αποκόψουμε από τις τέσσερεις γωνίες ενός ορθογώνιου χαρτονιού διαστάσεων 30cm επί 20cm, ώστε να σχηματίσουμε ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τον μέγιστο δυνατό όγκο.

27. Σε κώνο με ακτίνα 6cm και ύψος 15cm εγγράφεται κύλινδρος. Να υπολογίσετε το ύψος και την ακτίνα του κυλίνδρου, ώστε:

(α) ο όγκος του κυλίνδρου να είναι μέγιστος

(β) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου να είναι μέγιστο.

28. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 9$, $-3 < x < 3$. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει τις δύο κορυφές του στον άξονα των τετμημένων και τις άλλες δύο πάνω στην γραφική παράσταση της f, ώστε να έχει μέγιστο εμβαδόν.

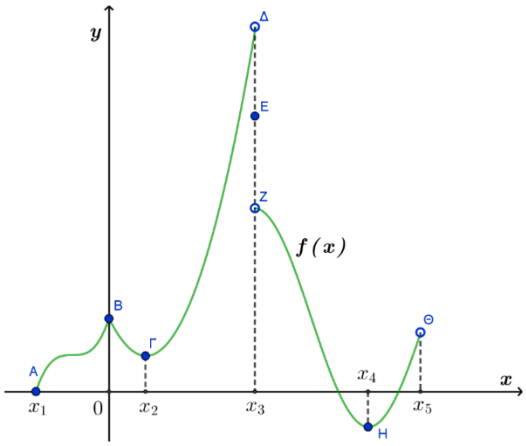
29. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο που ανήκει στην καμπύλη $y = \frac{1}{8}x^2$ από το σημείο $(2,4)$.

30. (α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

(β) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: [x_1, x_5) \to \mathbb{R}$.

(i) Να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

(ii) Να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f και να τα χαρακτηρίσετε.



31. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 3x - 1$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0,1)$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x^3) = 4f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(0) = 0$ και $f(8) = f(2)$

(β) υπάρχουν σημεία $\xi_1 \in (0,2)$ και $\xi_2 \in (2,8)$ ώστε οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της με τετμημένες ξ_1 και ξ_2 να είναι παράλληλες.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο D_f.

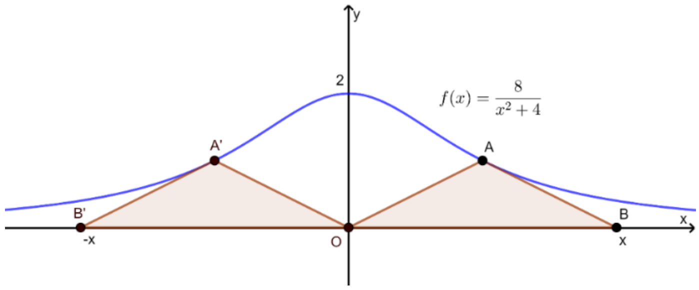
(β) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x} < e^{\frac{x-1}{x+1}}$, $x > 0$.

34. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης με εξίσωση $y = x^3 - 3x^2 + 5x$, στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης είναι ελάχιστη. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της κλίσης.

35. (α) Να δώσετε τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 + \frac{2e^x}{e^x+1}$. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

36. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{8}{x^2+4}$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των τεταγμένων. Έστω A και A' σημεία της γραφικής παράστασης της f.



(α) Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των ισοσκελών τριγώνων OAB και $OA'B'$ δίνεται από τον τύπο:

$$E(x)=\frac{32x}{x^2+16}$$

(β) Να βρείτε τις θέσεις των σημείων B και B', έτσι ώστε το άθροισμα των εμβαδών των ισοσκελών τριγώνων OAB και $OA'B'$ να παίρνει τη μέγιστη τιμή.

37. Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία είναι κυρτή, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$$f''(x) > 4[f'(x)-f(x)]\ \forall x \in \mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

38. Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 Km με σταθερή ταχύτητα x Km την ώρα. Σύμφωνα με τον κώδικα οδικής κυκλοφορίας, το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 Km/h. Τα καύσιμα κοστίζουν 1,6 ευρώ το λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $5{,}5+\frac{x^2}{100}$ λίτρα και η αμοιβή του οδηγού είναι 20 ευρώ την ώρα.

(α) Να δείξετε ότι το συνολικό κόστος K(x) της διαδρομής είναι:

$$K(x)=\frac{1800}{x}+5x, \qquad 0<x\leq 90$$

(β) Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής είναι ελάχιστο.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-6x^2+\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τοπικά ακρότατα και το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f είναι συνευθειακά.

(β) Να βρείτε το α , ώστε η απόσταση του σημείου καμπής από την αρχή των αξόνων να είναι ελάχιστη. Ποια η ελάχιστη απόσταση;

40. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β). Αν $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$, να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi,f(\xi))$ της f με $\xi \in (\alpha,\beta)$ όπου η εφαπτομένη της f είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x-2y+3=0$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+e^x$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^3+x}-e^{2x}=x-x^3$

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-1}+x^2>2$.

42. Η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι γνησίως μονότονη και ισχύει $f(5)=4$ και $f(4)=5$.

(α) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(-4)$ και $f(5)$.

(β) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(f(-4))$ και $f(f(5))$.

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2-2x-3)<4$.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 6\beta x^2 - 10x + 7$.

(α) Αν η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$ και σημείο καμπής στο $x = -1$ να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(β) Αν η γραφική παράσταση της f έχει δύο σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > 4\beta$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι:

$$xf'(x) = f(x) - x^2, \qquad \forall x \in (0, +\infty)$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)+x^2}{x}$ είναι σταθερή $\forall x \in (0, +\infty)$.

(β) Να βρείτε τον τύπο της f, αν δίνεται επιπλέον ότι $f(1) = 1$.

45. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$,να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 2x$.

(i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

(ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) < 0$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - 2x + e$.

(α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to 0^+} (f(x))$.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(γ) Να δείξετε ότι $x^x \geq e^{2x-e}$.

47. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

(β) $f'(\alpha)f'(\beta) < 0$.

(γ) $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ όπου x_0 η μοναδική ρίζα της f'.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

$$(\text{τοξσυν}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1)$$

2. Να υπολογίσετε τις ποσότητες :

(i) $\text{τοξσυν}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\text{τοξσυν}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (iii) $\text{εφ}\left(\text{τοξημ}\frac{3}{5}\right)$

(iv) $\text{ημ}\left(\text{τοξεφ}\frac{3}{4}\right)$ (v) $\text{συν}\left(2\text{τοξσφ}\frac{12}{5}\right)$ (vi) $\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}\frac{7}{24}\right)$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \text{τοξημ}(2x - 1)$ (β) $f(x) = \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(γ) $f(x) = \text{τοξσυν}(e^{x+1})$ (δ) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} - x\,\text{τοξσυν}x$

4. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \text{τοξεφ}x - \ln\sqrt{1 + x^2}$.

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2\text{τοξσυν}(3x - 2)$

6. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξημ}x + \text{τοξσυν}x, -1 \leq x \leq 1$ είναι σταθερή και να βρείτε τη τιμή της.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξεφ}(\sqrt{x})$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

8. (α) Να αποδείξετε ότι : $(\text{τοξεφ}x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξεφ}(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα και να δείξετε ότι $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

9. Να εκφράσετε την παράσταση $\text{εφ}(\text{τοξσυν}(3x))$, $0 < x \leq \frac{1}{3}$ ως αλγεβρική παράσταση του x.

10. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \text{τοξεφ}x}{2x^3}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x - \text{τοξημ}x}{\text{ημ}x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{τοξεφ}x + x}{\text{τοξσυν}x - \frac{\pi}{2}}$

11. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{τοξημ}x - x$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\text{τοξημ}\left(\frac{1}{\pi}\right) - \text{τοξημ}\left(\frac{1}{6}\right) < \frac{1}{\pi} - \frac{1}{6}$

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 3:</u> ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ομάδα Α

1. Να υπολογίσετε τα πιό κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int \left(x^2 - e^{3x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \text{εφ}\frac{\pi}{6}\right)dx$

(β) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

(γ) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$

(δ) $\displaystyle\int \text{ημ}^6 x\,\text{συν}x\,dx$

(ε) $\displaystyle\int [9e^{6-3x} - 4\text{τεμ}^2(5x+4)]\,dx$

(στ) $\displaystyle\int 4x\ln\sqrt{x-1}\,dx$

(ζ) $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}dx$, $x = 2\text{ημ}\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(η) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\text{συν}\left(e^{x^2}\right)dx$

(θ) $\displaystyle\int \frac{2x^3+1}{x^4+x^2}dx$

(ι) $\displaystyle\int \frac{x\,\text{τοξημ}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $x \in (-1,1)$

(κ) $\displaystyle\int \frac{3-x}{x^2+3x}dx$

(λ) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+16}dx$

(μ) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}dx$, $x = \sqrt{2}\text{τεμ}\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(ν) $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\text{συν}2x - \text{ημ}2x}dx$

(ξ) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\text{συν}x + \text{ημ}x}dx$

(ο) $\displaystyle\int xe^{x^2+1}\,dx$

(π) $\displaystyle\int \frac{\text{συν}^3 x}{1-\text{ημ}x}dx$

(ρ) $\displaystyle\int e^x\text{συν}2x\,dx$

(σ) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}dx$, $u = \sqrt{2x+1}$, $x > 0$

(τ) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$, $x = \text{συν}2\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

2. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ, να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^x(f(x)+f'(x))dx$$

Στη συνέχεια, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx$$

3. Αν $A=\int\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+2\eta\mu x}dx$ και $B=\int\frac{\eta\mu 2x}{1+2\eta\mu x}dx$ να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα A, $A+B$ και B.

4. Αν $f''(x)=\frac{1-f'(x)}{x}$, $x>0$ και $f(1)=f'(1)=0$ να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$.

5. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x)$ στο $(0,+\infty)$ αν για κάθε $x>0$ ισχύει ότι:

$$e^{f(x)}-4x^3=x\left[6x-e^{f(x)}f'(x)\right] \text{ και } f(1)=\ln 3$$

6. Με τον μετασχηματισμό $y=\alpha\sigma\upsilon\nu^2\theta+\beta\eta\mu^2\theta$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ τα ολοκληρώματα της μορφής $\int f\left(\sqrt{x-\alpha},\sqrt{\beta-x}\right)dx$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ανάγονται σε ολοκληρώματα της μορφής $\int F(\eta\mu\theta,\sigma\upsilon\nu\theta)d\theta$. Να επιλέξετε κατάλληλα τα α,β και να δείξετε ότι:

$$\int\sqrt{\frac{x-7}{11-x}}dx=4\left(\theta-\frac{\eta\mu 2\theta}{2}\right)+c$$

7. Αν $f(x)=2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x+6$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $17\eta\mu x+6\sigma\upsilon\nu x+24=\alpha f(x)+\beta f'(x)$:

(α) Να δείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-3$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int\frac{17\eta\mu x+6\sigma\upsilon\nu x+24}{2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x+6}dx$$

Ομάδα Β

1. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $x(f'(x)-f(x))=f(x)$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=e^2$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)f'(x)e^{f^2(x)}=e^{2x}$. Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2,2)$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $y=f(x)$.

3. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, όταν η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της $M(x,f(x))$ με κλίση $\frac{(x-1)e^x}{x^2}$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,e+1)$.

4. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$xf'(x)+x=\frac{2x+1}{x^2+x+1}\ \ \forall\, x>0 \text{ και } f(1)=\ln 3$$

5. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $2xf(x)+x^2f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-f'(x)$ και $f(0)=1$.

6. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(3)=7$, η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)=\frac{2+f(x)}{x}$. Να βρείτε το τύπο της συνάρτησης f.

7. Να βρείτε τη συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=(3x^2+2)e^{-f(x)}$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασής της, στο σημείο της $M(2,f(2))$, έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $\frac{7}{6}$.

8. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(1)=1$ και $xf'(x)-f(x)=x\ln^2 x$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

9. Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$, για την οποία ισχύει ότι $f(0)=4$ και επιπλέον:

$$e^{x^2}f'(x)+5=2x\left[1-e^{x^2}f(x)\right]$$

10. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x+\frac{1}{x}=t$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^4+3x^2+1)\text{τοξεφ}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}, \qquad x\neq 0$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΣΕΙΡΕΣ

1. Αν το μερικό άθροισμα μιας σειράς είναι ίσο με $S_\nu=2\nu^2+3\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$ να βρείτε το γενικό όρο της.

2. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα της σειράς:

$$1\cdot 4+3\cdot 7+5\cdot 10+\cdots$$

3. Να αποδείξετε ότι :

$$\sum_{\kappa=\nu+1}^{3\nu}\kappa=\nu(4\nu+1)$$

4. Να δείξετε ότι:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\frac{3+2^\kappa}{4^\kappa}=2$$

5. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$15^2+17^2+19^2+\cdots+31^2$$

6. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=1}^{10}(2\kappa+4)^2$$

7. Να δείξετε ότι:

$$\sum_{\kappa=5}^{20}\ln\left(\frac{\kappa+3}{\kappa+4}\right)=-\ln 3$$

8. Να δείξετε ότι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(4\kappa^3+6\kappa^2-2\kappa)=\nu^2(\nu+1)(\nu+3)$$

9. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν να υπολογίσετε το άθροισμά τους:

(α) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty}2\cdot 3^{-\kappa}$ (β) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty}(\kappa+1)$ (γ) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty}(-1)^\kappa\cdot 2^\kappa$

10. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα της σειράς:

$$1\cdot 1^2+2\cdot 4^2+3\cdot 7^2+4\cdot 10^2+\cdots$$

11. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$-1^2+2^2-3^2+4^2-(2\nu-1)^2+(2\nu)^2$$

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 5:</u> ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$

(β) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x}{(x+2)(x^2+1)}\,dx$

(γ) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\qquad x = \eta\mu\theta$

2. Αν $\int_1^{\alpha}(3x^2-2x)dx = 2\alpha^2$ με $\alpha > 0$ να βρείτε την τιμή του α.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2\pi]$ να δείξετε ότι:

$$\int_0^{2\pi} xf(\sigma\upsilon\nu x)dx = \pi\int_0^{2\pi} f(\sigma\upsilon\nu x)\,dx$$

και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{2\pi} x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$$

4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = \pi - x$, να δείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu^3 x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$$

5. Η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, a]$. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = \alpha - x$ να δείξετε ότι:

$$\int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{f(x)+f(\alpha-x)}\,dx = \frac{\alpha}{2}$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^5 x}{\eta\mu^5 x+\sigma\upsilon\nu^5 x}\,dx$$

6. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = -x^2 + 6x + 9$ και $y = 2x^2$.

7. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(t^2, 2t)$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο A τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο B.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι η $ty - x = t^2$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του B.

(β) Αν T είναι το χωρίο που ορίζεται από την παραβολή και τις OB, AB να υπολογίσετε το εμβαδόν του T, $E(t)$.

(γ) Αν $E(t) = \frac{1}{6}$ τ.μ., να δείξετε ότι $t = 1$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των A και B.

(δ) Να βρείτε τον όγκο V_x που γράφει το χωρίο T γύρω από τον άξονα τον άξονα των τετμημένων.

(ε) Να βρείτε τον όγκο V_y που γράφει το χωρίο T γύρω από τον άξονα τον άξονα των τεταγμένων.

(ζ) Να δείξετε ότι $\frac{V_x}{V_y} = 5$.

8. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^x$, την ευθεία $y = e$ και τον άξονα των τεταγμένων χωρίζεται από την ευθεία $y = \lambda x + 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$, σε δύο ισεμβαδικά μέρη. Να υπολογίσετε την τιμή του λ.

9. Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή στο διάστημα $[0, \pi]$ και για την οποία ισχύει :

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) ημx dx = 2$$

Αν $f(\pi) = 1$, με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το $f(0)$.

10. Έστω οι συναρτήσεις f, g με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ και $f'(\beta) = g'(\beta)$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)g''(x) - f''(x)g(x)]dx = g'(\beta)(f(\beta) - g(\beta))$$

11. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} 6x dx = 3(\beta^2 - \alpha^2)$$

12. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = -\frac{4}{3}$$

13. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{3} (x + 2)dx$$

14. Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in R$ ώστε:

$$\int_3^{\alpha} \frac{x^4 + 2x}{x^2 + 9} dx + \int_{\alpha}^{3} \frac{x^4 - 2x^2 + 2x - 18}{x^2 + 9} dx = 10$$

15. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύουν: $\int_3^6 f(x)dx = 9$ και $\int_1^6 f(x)dx = 20$. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_3^1 f(x)dx$

(β) $\int_1^{\sqrt{6}} x \cdot f(x^2)dx$

16. Έστω μια συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο, η οποία εφάπτεται στον $x'x$ στο $x = 1$ και για την οποία ισχύει ότι: $\int_0^1 [f''(x) - f(x)]e^x dx = 2$ και $f'(0) = 1$. Να δείξετε ότι:

(α) $f(0) = 3$

(β) υπάρχει $\xi \in (0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της f είναι κάθετη στην $(\varepsilon): x - 3\psi + 1 = 0$.

17. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 (x^2 + 1)^3 \cdot 2x dx$

(β) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx, \quad x = τεμθ, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

(γ) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

18. Αν $\int_1^5 f(x)\, dx = -1$ και $\int_3^5 f(x)\, dx = 3$ να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_5^3 f(x)\, dx$

(β) $\int_1^3 f(x)\, dx$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με συνεχή τρίτη παράγωγο η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 0$ και σημείο καμπής στο σημείο $x_1 = 3$. Αν ισχύει:

$$\int_0^3 (xf'''(x) + 3f''(x))dx = 10$$

(α) Να δείξετε ότι $f'(3) = 5$

(β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = f'(x)$, να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^3 \frac{f''(x)}{(f'(x))^2 + 7f'(x) + 12} dx = \ln\left(\frac{32}{27}\right)$$

20. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{1}{1+e^x}$ και τις ευθείες $x = 0, y = 0$ και $x = \ln 2$ ισούται με $\ln\frac{4}{3}$ τ.μ.

21. Έστω $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$x^2 f'(x) = 9x^2 - 2xf(x) \ \ \forall\, x > 0$$

και $f(1) = \frac{7}{2}$

(α) Να βρείτε τον τύπο της f.

(β) Αν $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$ να δείξετε ότι η $y = 3x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της και υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f την πλάγια ασύμπτωτη και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$ με $\lambda > 0$.

(γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

22. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1,5] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + f(6 - x) = 3$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^5 f(x)\, dx$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και η γραφική παράσταση της διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$. Αν ισχύει $\int_0^2 (xf''(x) + 3f'(x))dx = 6$ τότε:

(α) Να δείξετε ότι $f(2) = 4$.

(β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = f(x)$ να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 \frac{2f'(x)}{f^2(x) + 2f(x)} dx$$

(γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{3}{2}$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - x - 1$.

(α) Να δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $A(1, -2)$ και ότι:

$$x^x \geq e^{x-1} \quad \forall x > 0$$

(β) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^2 x^x \cdot dx > e - 1$$

25. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από μια πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της καμπύλης $y = \varepsilon\varphi x$, τον άξονα των τετμημένων και της ευθείας $x = \frac{\pi}{4}$.

26. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 3x$ και $y = -x$.

27. Το χωρίο που περικλείεται από την $\psi = x^2$, την ευθεία $x = \kappa$ ($\kappa > 0$) και τον άξονα των τετμημένων περιστρέφεται κατά 2π γύρω από τον άξονα των τετμημένων και παράγει όγκο V_x. Όταν περιστρέφεται κατά 2π γύρω από τον άξονα των τεταγμένων παράγει όγκο V_ψ. Αν $V_x = 2V_\psi$, να υπολογίσετε την τιμή του κ.

28. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ τέτοια ώστε:

$$\mathrm{f(x)+f(-x)=1} \text{ για κάθε } \mathrm{x} \in [-\alpha, \alpha]$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathrm{f(x)} \cdot \mathrm{dx} = \alpha$$

(β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5^{\eta\mu x}+1} \cdot \mathrm{dx}$$

29. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0,4]$ και τέτοια ώστε να ισχύει ότι $\mathrm{f(x)} \geq \mathrm{x} \cdot \mathrm{f'(x)}, \forall \mathrm{x} \in [0,4]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{0}^{4} \mathrm{f(x)} \cdot \mathrm{dx} \geq 2\mathrm{f}(4)$$

30. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\mathrm{f, g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\mathrm{f(x)} > 0$ για τις οποίες ισχύει $\mathrm{F(x) = x + e^{g(x)}}$, $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{R}$ όπου F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$. Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα των $\mathrm{x'x}$ και τις ευθείες $\mathrm{x}=1$ και $\mathrm{x}=3$ είναι ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες .

(α) Να δείξετε ότι $\mathrm{g}(3)=\mathrm{g}(1)$.

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{g'}(\xi)=0$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)=lnx}, \mathrm{x}>0$.Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο A.

(α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημεία της $\mathrm{P(e, f(e))}$, περνά από την αρχή των αξόνων.

(β) Να βρείτε το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου POA (όπου Ο η αρχή των αξόνων).

(γ) Αν το πιο πάνω χωρίο περιστραφεί μια πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων, να βρείτε τον όγκο του στερεού που θα παραχθεί.

32. Δίνεται η καμπύλη (c) με εξίσωση $\mathrm{y}=-\mathrm{x}^2+\alpha^2, 0<\alpha \leq 2, \mathrm{x} \in \mathbb{R}$ που τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε δύο σημεία. Το χωρίο E_1 περικλείεται από καμπύλη (c) και τους θετικούς ημιάξονες, ενώ το χωρίο E_2 περικλείεται μεταξύ της (c), τον θετικό ημιάξονα Ox και την ευθεία $\mathrm{x}=2$.

(α) Να βρείτε την τιμή του α ώστε το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων E_1 και E_2 να είναι ελάχιστο.

(β) Αν $\alpha=1$ να βρείτε τον όγκο που θα παραχθεί αν το E_1 περιστραφεί μια πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 6:</u> ΚΥΚΛΟΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου:

(α) με κέντρο $\mathrm{K}(-2,1)$ και ακτίνα 3cm

(β) που έχει ακτίνα 4cm και εφάπτεται των θετικών ημιαξόνων

(γ) που έχει διάμετρο AB όπου $\mathrm{A}(3,2)$ και $\mathrm{B}(1,-4)$.

2. Να δείξετε ότι ο κύκλος που έχει κέντρο $\mathrm{K}(10,8)$ και περνά από το σημείο $\mathrm{A}(2,2)$ είναι ο:

$$\mathrm{x^2+y^2-20x-16y+64=0}$$

(α) Να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα των τεταγμένων και να βρείτε το σημείο επαφής.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $\mathrm{A}(2,2)$.

3. Δίδονται οι κύκλοι:

$$(\kappa_1): x^2+y^2=4 \text{ και } (\kappa_2): x^2+y^2-6x-8y+16=0$$

Να βρείτε:

(α) τα κέντρα και τις ακτίνες των κύκλων

(β) τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου (κ_2)

(γ) τη θέση των κύκλων (κ_1), (κ_2)

(δ) το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $(-2,3)$ προς τον κύκλο (κ_1)

(ε) τη θέση του σημείου $A(2,-5)$ ως προς τον (κ_2).

4. Δίνεται ο κύκλος $(x-1)^2+(y+3)^2=4$.

(α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(2,-2)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το A.

(γ) Να βρείτε το μήκος της πιο πάνω χορδής.

5. Να βρείτε τη γωνιά που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες που άγονται από την αρχή των αξόνων προς τον κύκλο $x^2+y^2-4x+2=0$.

6. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2-2y=3$. Η εφαπτομένη στο σημείο του $T(2\sigma\upsilon\nu\theta, 1+2\eta\mu\theta)$ τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων στα σημεία A και B. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος AB.

7. Δίνεται κύκλος $x^2+y^2=4$ και $A(2\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$ τυχαίο σημείο του κύκλου. Από το A φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των τετμημένων και ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των τεταγμένων. Οι ευθείες τέμνουν τους άξονες στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Αν το σημείο A βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο να βρείτε τις συντεταγμένες του A έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΒΑΓ να είναι μέγιστο (O η αρχή των αξόνων).

8. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda x+(\lambda-4)y+8-\lambda=0 \quad (1)$.

(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

(β) Για τις τιμές του λ που παριστάνει κύκλο να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των κέντρων των κύκλων.

(γ) (i) Αν η η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία $(\varepsilon): 3x-4y-5=0$ είναι 2μ. να βρείτε τις τιμές του λ.

(ii) για $\lambda=6$ να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία και να βρείτε το μήκος της χορδής που αποκόπτει ο κύκλος από την (ε).

9. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\lambda x-1=0,\ \lambda\in\mathbb{R} \ (1)$.

(α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) για διάφορες πραγματικές τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες.

10. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2-2\alpha x=0$. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}^*$ ώστε το μήκος του εφαπτομένου τμήματος AB που άγεται από το σημείο $A(3,4)$ προς τον κύκλο με B να είναι το σημείο επαφής, είναι ίσο 3 μ.

11. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=R^2$. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου του οποίου οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο είναι κάθετες.

12. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=mx+\rho\sqrt{1+m^2}$ εφάπτεται στον κύκλο $(c): x^2+y^2=\rho^2$ για κάθε $m\in\mathbb{R}$.

13. (α) Να δώσετε τον ορισμό του κύκλου.

(β) Να αποδείξετε ότι το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $\Sigma(x_1,y_1)$, προς κύκλο με εξίσωση $(c): x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ είναι ίσο με:

$(A\Sigma)=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$, όπου A το σημείο επαφής.

14. Δίνεται η εξίσωση $(c_1): x^2+y^2+(\lambda-1)x+(1-\lambda)y-\frac{\lambda^2}{2}=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in R$.

(β) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου (c_1) και να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την αρχική εξίσωση ανήκουν σε μια ευθεία , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

15. Δίνονται οι κύκλοι
$(c_1): (x-7)^2+(y-5)^2=16$ και $(c_2): (x-5)^2+(y-3)^2=8$

(α) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται.

(β) Αφού βρείτε τα σημεία τομής των δύο κύκλων να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει ως διάμετρο την κοινή χορδή των κύκλων (c_1) και (c_2).

16. Δίνεται ο κύκλος $(c): (x-3)^2+y^2=8$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που είναι κάθετες στην ευθεία $(\varepsilon): y=-x+3$.

17. Δίνονται οι κύκλοι $x^2+y^2=8$ και $x^2+y^2-8x-8y+24=0$. Να δείξετε ότι εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

18. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής Α των ευθειών $(\varepsilon_1): x\sigma\upsilon\nu\theta+y=1$ και $(\varepsilon_2): x-y\sigma\upsilon\nu\theta=1$, με $\theta\in\mathbb{R}$ κινείται σε κύκλο.

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 7:</u> ΠΑΡΑΒΟΛΗ

1. Η εφαπτόμενη της παραβολής $y^2=4\alpha x$ στο $P(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$ τέμνει τη διευθετούσα στο A. Από το A φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων, η οποία τέμνει την κάθετη της παραβολής στο P στο σημείο B. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του B είναι $y^2=\alpha(x-3\alpha)$.

2. Μια ευθεία (ε), που διέρχεται από την εστία E της παραβολής $(c): y^2=2\alpha x, \alpha>0$ τέμνει την παραβολή στα σημεία A και B. Έστω Γ, Δ οι προβολές των σημείων A και B πάνω στη διευθετούσα (δ). Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ διέρχεται από την εστία E της παραβολής.

3. (α) Να γράψετε τον ορισμό της παραβολής.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $E(2,3)$ και διευθετούσα $x=7$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με την ευθεία $2x+y=10$ και εφάπτεται της παραβολής $y^2=8x$.

4. Δίνεται η παραβολή $y^2=12x$ και $A(3{t_1}^2, 6t_1), B(3{t_2}^2, 6t_2)$ δύο σημεία της με $t_1\neq t_2$.

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της στα σημεία A και B.

(β) Να δείξετε ότι η εφαπτόμενες αυτές τέμνονται στο σημείο $\Gamma(3t_1t_2, 3(t_1+t_2))$.

(γ) Αν οι εφαπτόμενες στα σημεία A και B είναι κάθετες να δείξετε ότι αυτές τέμνονται πάνω στη διευθετούσα της παραβολής.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου της χορδής AB, αν επιπλέον $t_1t_2=1$.

5. Δίνεται η παραβολή $y^2=4\alpha x$, $\alpha>0$, με εστία E.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της παραβολής αντίστοιχα, στο σημείο της $A(\alpha t^2, 2\alpha t)$ είναι:

$$x-ty+\alpha t^2=0 \text{ και } tx+y=2\alpha t+\alpha t^3$$

(β) Η κάθετη της παραβολής στο A τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο B. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB.

(γ) Η εφαπτομένη στο A τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Γ. Από το σημείο A φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, η οποία τέμνει την διευθετούσα της στο σημείο Δ. Να δείξετε το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ρόμβος.

6. Παραβολή έχει εστία το σημείο $(\alpha, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία $x = -\alpha$.

(α) (i) Να γράψετε τον ορισμό της παραβολής

(ii) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραβολής να αποδείξετε ότι η εξίσωση της είναι:

$$y^2 = 4\alpha x$$

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής στα σημεία $A(\alpha t^2, 2\alpha t)$ και $B(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$.

(γ) Αν ΑΒ είναι εστιακή χορδή τότε:

- να δείξετε ότι οι πιο πάνω εφαπτομένες είναι κάθετες μεταξύ τους
- να δείξετε ότι το σημείο τομής των πιο πάνω εφαπτομένων ανήκει στη διευθετούσα της παραβολής
- να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου M της χορδής της AB.

7. Από το σημείο $\Sigma(-3,4)$ φέρουμε τις εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 4x$ και ονομάζουμε $K(x_1, y_1)$, $\Lambda(x_2, y_2)$ τα σημεία επαφής.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο K είναι $yy_1 = 2(x + x_1)$.

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής $K\Lambda$ είναι $x - 2y = 3$.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της $K\Lambda$.

8. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4\alpha x$ και σημείο της $P(x_1, y_1)$ διαφορετικό από το $O(0,0)$. Η εφαπτόμενη (ε) της παραβολής στο P τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο T. Αν K είναι η προβολή του P στη διευθετούσα. Να αποδείξετε ότι:

(α) η εξίσωση της (ε) είναι $yy_1 = 2\alpha(x + x_1)$.

(β) τα σημεία E, T, K είναι συνευθειακά.

9. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4\alpha x$, $\alpha > 0$ και τα σημεία της $A(\alpha {t_1}^2, 2\alpha t_1)$ και $B(\alpha {t_2}^2, 2\alpha t_2)$.

(α) Να δείξετε ότι η χορδή ΑΒ έχει εξίσωση: $2x - (t_1 + t_2)y + 2\alpha t_1 t_2 = 0$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση πάνω στην οποία κινείται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ΑΒ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

i. η ΑΒ περνά από το σημείο $(2,0)$

ii. η ΑΒ σχηματίζει γωνία $30°$ με τον άξονα των τετμημένων.

10. (α) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής

(β) Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4\alpha x$, $\alpha > 0$ με εστία E και διευθετούσα (δ). Από σημείο T της παραβολής φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των τετμημένων που τέμνει τη διευθετούσα (δ) στο σημείο A έτσι ώστε $AE = 6\sqrt{2}$ μονάδες. Αν η περίμετρος του τριγώνου TAE είναι ίση με $(12 + 6\sqrt{2})$ μονάδες, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου TAE.

11. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και το σημείο της $P(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$, $\rho > 0$. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα PA κάθετο στον άξονα των τεταγμένων (A σημείο του άξονα των τεταγμένων). Από το A φέρουμε ευθεία (ε) κάθετη στο OP (O η αρχή των αξόνων).

(α) Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε σταθερό σημείο B.

(β) Αν Γ σημείο της παραβολής τέτοιο ώστε η ΓO να είναι κάθετη στην PO, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $PO\Gamma$ είναι $E = 4\rho + \frac{16}{\rho}$.

(γ) Να βρείτε για ποια τιμή του ρ το πιο πάνω εμβαδόν E, γίνεται ελάχιστο.

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 10:</u> ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\frac{\mathrm{K}_{\nu+3}}{\mathrm{M}_{\nu}}=6$ (β) $\Delta_2^{\nu+1}=3\binom{\nu}{2}$ (γ) $\Delta_3^{\nu+1}=\Delta_4^{\nu}$ (δ) $\binom{\nu}{3}=\binom{\nu}{5}$

2. Αν $\Delta_2^{\nu}=30$, να υπολογίσετε το $\binom{\nu}{4}$.

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $\mathrm{A}=\frac{12!}{3!\cdot 10!}+\frac{7!}{5!\cdot 2!}$

(β) $\mathrm{B}=\frac{\nu!+(\nu+1)!}{\nu+2}$

4. Δίνονται τα ψηφία **0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8**.

(α) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;

(β) Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν αν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;

(γ) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί χωρίς επανάληψη μπορούν να σχηματιστούν που να είναι μεγαλύτεροι του 300 και μικρότεροι του 800;

(δ) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί χωρίς επανάληψη μπορούν να σχηματιστούν που να είναι άρτιοι;

5. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 8 άτομα γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι, αν τρία από αυτά θα πρέπει να καθίσουν σε συνεχόμενες θέσεις.

6. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε κυκλικό τραπέζι 10 άτομα μιας επιτροπής αν ο πρόεδρος και ο αντιπρόεδρος θα πρέπει να καθίσουν σε συνεχόμενες θέσεις.

7. Δίνονται οι αριθμοί **4, 5, 6, 7, 8**.

(α) Πόσους τριψήφιους αριθμούς μεγαλύτερους του 700 μπορούμε να σχηματίσουμε αν:

i. επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων

ii. δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων

(β) Πόσους αριθμούς μικρότερους του 500 μπορούμε να σχηματίσουμε αν

i. επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων

ii. δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων

8. Για την εκλογή πενταμελούς συμβουλίου υπέβαλαν υποψηφιότητα 7 άνδρες και 5 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί το συμβούλιο αν πρέπει να έχει

(α) μόνο 2 γυναίκες;

(β) μέχρι 2 γυναίκες;

9. (α) Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία **0, 1, 3, 5, 6, 8, 9**;

(β) Πόσοι από τους πιο πάνω είναι άρτιοι;

(γ) Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (β) είναι μεγαλύτεροι του 5000;

(δ) Αν πάρουμε ένα από τους αριθμούς του ερωτήματος (α) ποιά η πιθανότητα ο αριθμός αυτός να είναι μεγαλύτερος του 3000 και μικρότερος του 9000;

10. Να βρείτε το πλήθος όλων των πενταψήφιων αριθμών που τα ψηφία τους είναι σε φθίνουσα σειρά.

11. Έχουμε τις ομάδες αριθμών Α={2,3,4,5} και Β={1,5,7}. Παίρνουμε 3 αριθμούς από την πρώτη ομάδα και 2 από την δεύτερη. Πόσους πενταψήφιους σχηματίζουμε;

12. Δίνονται τα ψηφία **0, 2, 3, 4, 5, 6, 9**. Αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου να βρείτε:

(α) πόσοι τετραψήφιοι γίνονται

(β) πόσοι τετραψήφιοι είναι ζυγοί,

(γ) πόσοι τετραψήφιοι από αυτούς διαιρούνται με το 5.

13. Δίνεται η λέξη **Π Α Σ Χ Α Λ Ι Α**.
(α) πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης υπάρχουν
(β) πόσοι αναγραμματισμοί αρχίζουν από Α και τελειώνουν σε Α
(γ) πόσοι αναγραμματισμοί αρχίζουν από φωνήεν
(δ) πόσοι αναγραμματισμοί έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις;

14. Δίνεται η λέξη **Α Ι Σ Ι Ο Δ Ο Ξ Ο.**
(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
(β) Να βρείτε σε πόσους αναγραμματισμούς της πιο πάνω λέξης:
(i) η λέξη **Ο Δ Ο Σ** βρίσκεται στο τέλος
(ii) τα σύμφωνα είναι μαζί
(iii) το **Σ** προηγείται του **Α** και το **Δ** του Ξ. Για παράδειγμα «**Ο Σ Α Ι Ο Δ Ξ Ο Ι** » και «**Ι Σ Ι Α Ο Δ Ο Ο Ξ**» είναι δύο τέτοιοι αναγραμματισμοί.
(iv) δεν έχουν δύο **Ο** συνεχόμενα.

15. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε 3 χρυσόψαρα σε 5 γυάλες:
(α) χωρίς περιορισμό.
(β) σε τρεις διαφορετικές γυάλες
(γ) σε μία γυάλα
(δ) σε δύο ακριβώς γυάλες.

16. Πόσες χειραψίες μπορούν να ανταλλάξουν 12 πολιτικοί αν τρεις από αυτούς λόγω έχθρας δεν θα ανταλλάξουν χειραψία.

17. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης **Γ Α Ρ Υ Φ Α Λ Λ Α** υπάρχουν;
(α) Σε πόσους απ’ αυτούς τα Α είναι χωριστά;
(β) Σε πόσους απ’ αυτούς τα 3 Α είναι μαζί;
(γ) Σε πόσους απ’ αυτούς τα 2Α είναι μαζί;
(δ) Πόσες λέξεις 4 γραμμάτων μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα γράμματα της πιο πάνω λέξης;

18. Πέντε αντρόγυνα πρόκειται να εκλέξουν μεταξύ τους 4 πρόσωπα. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να γίνει τούτο αν:
(α) πρέπει να εκλέξουν 2 άντρες , 2 γυναίκες .
(β) μόνο ένας από το αντρόγυνο μπορεί να εκλεγεί
(γ) πρέπει να επιλεγούν τουλάχιστο 2 άντρες.

19. Δίνονται τα ψηφία **2, 3, 4, 6, 8, 9.** Αν **δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου** να βρείτε:
(α) πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε
(β) πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι
(γ) πόσοι απ ’ αυτούς είναι άρτιοι μεγαλύτεροι 400
(δ) πόσοι από αυτούς έχουν άρτιο άθροισμα ψηφίων ;

20. Σ’ ένα σχολείο υπηρετούν 2 βοηθοί Α΄, 5 βοηθοί Β΄ και 25 καθηγητές οι οποίοι θα σχηματίσουν πενταμελή επιτροπή για ένα συνέδριο .Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή αυτή αν:
(α) δεν υπάρχει περιορισμός
(β) στην ομάδα θα συμμετέχει 1 βοηθός Α΄ , 2 βοηθοί Β΄ , 2 καθηγητές
(γ) δεν θα συμμετέχουν βοηθοί Α΄
(δ) θα συμμετέχει ένας συγκεκριμένος καθηγητής
(ε) θα συμμετέχουν τουλάχιστο 3 καθηγητές .

21. Με πόσους τρόπους 12 μαθητές χωρίζονται:
(α) σε 4 ισοπληθείς ομάδες
(β) σε 2 ομάδες των 7 και 5
(γ) σε 3 ομάδες των 5,5,2
(δ) σε ισοπληθείς ομάδες σε 3 διαφορετικά τμήματα του σχολείου.

22. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε σειρά ν διαφορετικά αντικείμενα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots, \mathrm{A}_\nu$ έτσι ώστε το A_2 να είναι πιο δεξιά από το A_1, το A_3 να είναι πιο δεξιά από το A_2 και το A_4 να είναι πιο δεξιά από το A_3 (όχι αναγκαστικά σε διαδοχικές θέσεις). Π.χ. $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathrm{A}_5, \mathrm{A}_8, \mathbf{A_3}, \mathrm{A}_6, \mathbf{A_4}\ \cdots, \mathrm{A}_\nu$

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 11:</u> ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Για την εκλογή πενταμελούς συμβουλίου υπέβαλαν υποψηφιότητα 7 άνδρες και 5 γυναίκες.Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί το συμβούλιο αν πρέπει να έχει
(α) μόνο 2 γυναίκες;
(β) μέχρι 2 γυναίκες;

2. Έχουμε τις ομάδες αριθμών $\mathrm{A} = \{2, 3, 4, 5\}$ και $\mathrm{B} = \{1, 5, 6\}$. Παίρνουμε 3 αριθμούς από την πρώτη ομάδα και 2 από την δεύτερη.
(α) Πόσους πενταψήφιους σχηματίζουμε;
(β) Αν πάρω ένα από αυτούς ποια η πιθανότητα να διαιρείται δια 5.

3. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ενός πειράματος τύχης. Αν $\mathrm{P}(\alpha) = 2\mathrm{P}(\beta) = 3\mathrm{P}(\gamma) = \mathrm{P}(\delta)$, να βρείτε τις πιθανότητες $\mathrm{P}(\alpha)$, $\mathrm{P}(\beta)$, $\mathrm{P}(\gamma)$, $\mathrm{P}(\delta)$.

4. Αν $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}, \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{4}$ και $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{6}$ να υπολογίσετε τα πιο κάτω:
(α) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ (β) $\mathrm{P}(\mathrm{A}' \cup \mathrm{B})$ (γ) $\mathrm{P}(\mathrm{A}')$ (δ) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}')$ (ε) $\mathrm{P}(\mathrm{A}' \cup \mathrm{B}')$

5. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου δίδονται οι πιθανότητες:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \frac{1}{5}, \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{4}, \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες:
(α) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ (β) $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ (γ) $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ (δ) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ (ε) $\mathrm{P}(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}')$

6. (α) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης **Π Υ Ρ Ο Β Ο Λ Ι Κ Ο** υπάρχουν;
(β) Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς του ερωτήματος (α) ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου να έχει τα σύμφωνα σε συνεχόμενες θέσεις;
(γ) Αν πάρουμε στη τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς του ερωτήματος (α) ποιά η πιθανότητα του ενδεχομένου ο αναγραμματισμός να μην έχει τα τρία Ο σε συνεχόμενες θέσεις;

7. Μια κάλπη περιέχει 1 μαύρη, 4 κίτρινες και 5 πράσινες μπάλες. Κάποιος παίρνει τυχαία μια μπάλα από την κάλπη. Αν πάρει κίτρινη ή πράσινη δεν παίρνει άλλη μπάλα. Αν όμως πάρει την μαύρη τότε, χωρίς να την επανατοποθετήσει, παίρνει και δεύτερη μπάλα από την κάλπη.
(α) Να βρείτε τις πιθανότητες:
i. Να πήρε δύο μπάλες από την κάλπη.
ii. Να πήρε κίτρινη μπάλα.
(β) Δεδομένου ότι πήρε κίτρινη μπάλα, να βρείτε την πιθανότητα αυτό να έγινε στην πρώτη επιλογή μπάλας.

8. Ο Αντρέας κάλεσε στα γενέθλια του 10 φίλους του. Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου τρεις από τους φίλους του να έχουν τα γενέθλια τους την ίδια μέρα με αυτόν και έτσι δεν θα μπορέσουν να παραβρεθούν στο πάρτι.

9. Από 120 μαθητές ενός Λυκείου , 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας , 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.
Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
Α.: ο μαθητής να συμμετέχει σ’ έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς
Β.: ο μαθητής να συμμετέχει σ’ έναν μόνον από τους δύο διαγωνισμούς
Γ.: ο μαθητής να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς.

10. Δέκα ζεύγη με διαφορετικά παπούτσια είναι ανακατεμένα σ᾽ένα κιβώτιο. Παίρνουμε στην τύχη 4 παπούτσια. Ποια η πιθανότητα να υπάρξει μεταξύ αυτών ένα τουλάχιστον ζεύγος.

11. Να δώσετε τον ορισμό του δειγματικού χώρου και τον ορισμό των ασυμβίβαστων ενδεχόμενων.

12. Επιλέγουμε τυχαία πέντε ανθρώπους και καταγράφουμε τον μήνα γέννησης του καθενός ξεχωριστά.

(α) Να δείξετε ότι $\nu(\Omega) = 12^5$.

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α = «οι πέντε άνθρωποι έχουν γεννηθεί σε διαφορετικούς μήνες»

Β = «τουλάχιστον δύο άνθρωποι έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα»

13. Ο κύριος Παναγιώτης ζει σε ένα νησάκι στην Καραϊβική και κάθε βράδι ψαρεύει από το μπαλκόνι του σπιτιού του που είναι κτισμένο σε ένα βράχο της ακρογιαλιάς. Κάθε φορά που ρίχνει πετονιά, η πιθανότητα να ψαρέψει καρχαρία είναι 13%, να ψαρέψει ροφό είναι 23%, ενώ η πιθανότητα να μην ψαρέψει ούτε καρχαρία ούτε ροφό είναι 66%. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α = «ο κύριος Παναγιώτης να ψαρέψει είτε καρχαρία, είτε ροφό, είτε και τα δύο»

Β = «ο κύριος Παναγιώτης να ψαρέψει καρχαρία και ροφό»

Γ = «ο κύριος Παναγιώτης να ψαρέψει ακριβώς ένα είδος ψαριού»

Δ = «ο κύριος Παναγιώτης να ψαρέψει καρχαρία, δεδομένου ότι έχει ήδη ψαρέψει ροφό».

14. Δύο κουτιά περιέχουν, 6 κόκκινες και 4 πράσινες αριθμημένες μπάλες το πρώτο κουτί και 4 κόκκινες και 6 πράσινες αριθμημένες μπάλες το δεύτερο κουτί. Ρίχνουμε ένα ζάρι και αν εμφανιστεί αριθμός μεγαλύτερος του 4 επιλέγουμε μία μπάλα από το πρώτο κουτί, διαφορετικά παίρνουμε μία μπάλα από το δεύτερο κουτί. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α = «η μπάλα που επιλέξαμε να είναι πράσινη»

Β = «η μπάλα να προέρχεται από το πρώτο κουτί, δεδομένου ότι είναι πράσινη».

15. Το 40% των φορτηγών στην Κύπρο, είναι ρυπογόνα (εκπέμπουν καυσαέρια έξω από τα φυσιολογικά όρια). Ο τεχνικός μίας εταιρείας κάνει έλεγχο καυσαερίων στα 6 φορτηγά της εταιρείας αυτής. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α = «ο τεχνικός να εντοπίσει ακριβώς τρία ρυπογόνα φορτηγά»

Β = «ο τεχνικός να εντοπίσει το πολύ δύο ρυπογόνα φορτηγά»

Γ = «ο τεχνικός να εντοπίσει τουλάχιστον ένα ρυπογόνο και ένα μη ρυπογόνο φορτηγό».

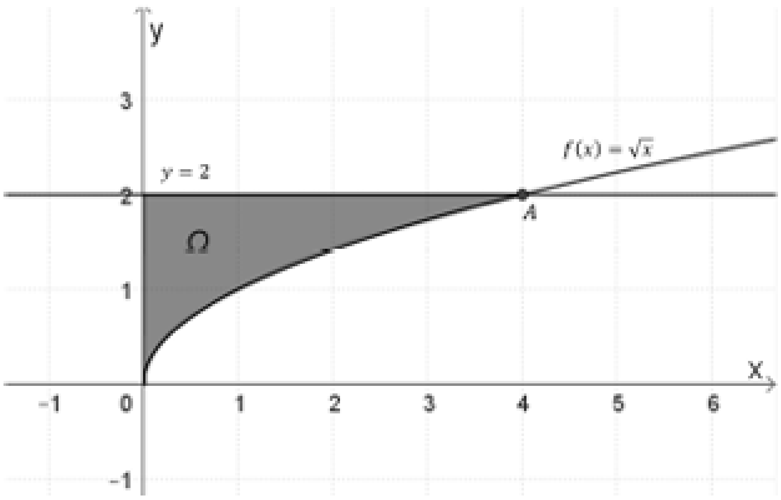
Σας ευχόμαστε κάθε επιτυχία!

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023-2024

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄:</u> Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1 Στο πιο κάτω σχήμα, η ευθεία $y = 2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, στο σημείο A και σχηματίζει το σκιασμένο χωρίο Ω.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου Ω.



Α2 α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int 4x^3 dx$$

(Μονάδες 5)

β) Αν $\int f(x)\,dx = 2x - \ln x + c,\ \ x > 0$ τότε η συνάρτηση f είναι:

i) $f(x) = 2x - \ln x,\ \ x > 0$

ii) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x},\ \ x > 0$

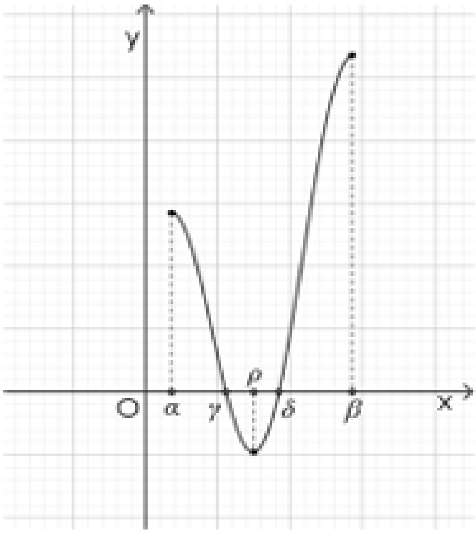
iii) $f(x) = x^2 - \dfrac{\ln^2 x}{2},\ \ x > 0$

iv) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x},\ \ x > 0$

(Μονάδες 5)

1/5

A3 α) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$.



Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ**.

i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\rho, \beta]$.

ii) Στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

iii) Ισχύει $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx > 0$.

iv) Ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \rho)$.

v) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

(Μονάδες 5)

β) i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x$ ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$.

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

(Μονάδες 2)

2/5

Α4 Δίνεται η λέξη «ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ».

α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε σε πόσους από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς δεν περιέχεται η λέξη «ΑΥΤΗ».

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε το πλήθος των λέξεων (με νόημα ή χωρίς νόημα) που μπορούν να σχηματιστούν, χρησιμοποιώντας 4 από τα γράμματα της λέξης «ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ», τα οποία να είναι 3 φωνήεντα και ένα σύμφωνο.

(Μονάδες 2)

Α5 α) Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f''(x) = (x-2)^3(x+1)^2$$

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 7)

β) Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

«Αν για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f''(x_0) = 0$ τότε η f έχει σημείο καμπής στο x_0».

(Μονάδες 3)

Α6 Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$xf'(x) + f(x) = e^x \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = e + 1.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Αν $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int x^2 f(x)dx$.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

3/5

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Οι ασκήσεις Β1 και Β2 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία ενώ η άσκηση Β3 βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = xe^{x+1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

(μονάδες 2)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

(μονάδες 4)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(μονάδες 4)

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(μονάδες 1)

Β2 Δίνεται έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \alpha > \beta$$

εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ και εκκεντρότητα ίση με $\varepsilon = \frac{4}{5}$. Το Τ είναι τυχαίο σημείο στην έλλειψη, διαφορετικό από τις κορυφές της $A'(-\alpha, 0)$ και $A(\alpha, 0)$ και η περίμετρος (Π) του τριγώνου $E'TE$ είναι ίση με $\Pi = 18$ μονάδες.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β και να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης.

(μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την έλλειψη

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

όταν αυτή περιστραφεί κατά π γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

(μονάδες 8)

4/5

Β3 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) - f(\alpha + \beta - x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \alpha + \beta - x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta x f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_\alpha^\beta f(x) dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^\pi \frac{x\ ημx}{\sqrt{4 - συν^2 x}} dx$$

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

5/5

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ 2024

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2024

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ, 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
8:00π.μ. – 11:00 π.μ.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.
Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από δύο (2) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(1,1)$, αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $\Sigma(1,6)$ προς τον κύκλο είναι ίσο με 4 μονάδες.

Α2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$$

Α3. Να χαρακτηρίσετε τον πιο κάτω ισχυρισμό ως **ΟΡΘΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

«Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $\Delta \subset \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ»

Α4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει ότι το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, αν η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης έχει κλίση:

$$\lambda(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Σελίδα 1 από 5

Α5. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x τοξημt\,dt}{συνx-1}$$

Α6. Θεωρούμε το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής

$$f(x)=(x+2)^2,$$

την ευθεία $y=9$ και τον άξονα των τεταγμένων. Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του πιο πάνω χωρίου

(μονάδες 2)

(β) τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

(μονάδες 3)

Α7. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει:

$$f''(x)=f(x)\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$\int f(x)ημx\,dx=\frac{f'(x)ημx-f(x)συνx}{2}+c,\qquad c\in\mathbb{R}$$

(μονάδες 3)

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x}ημx\,dx$$

(μονάδες 2)

Α8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^2dx$$

Σελίδα 2 από 5

Α9. Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$, με τύπο:

$$g(x)=f(x)-f(\alpha)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-a)$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

(μονάδες 3)

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

(μονάδες 2)

Α10. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x)=\eta\mu x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad g(x)=x-\eta\mu x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα ακρότατα.

(μονάδες 1,5)

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

(μονάδες 1)

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(0,f(0))$ και $\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

(μονάδες 1)

(δ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

(μονάδες 1,5)

$$\frac{2x}{\pi}\leq\eta\mu x\leq x,\quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = \alpha^2$ και P τυχαίο σημείο του. Από το σημείο P φέρουμε ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων, η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο N. Έστω Σ σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα PN τέτοιο ώστε:

$$\frac{\Sigma N}{PN} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ όπου } 0 < \beta < \alpha,\ \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ καθώς το P κινείται πάνω στον κύκλο είναι η

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

(μονάδες 5)

(β) Δίνεται το σύστημα των ανισώσεων:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq \alpha^2 \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} \geq 1, \quad 0 < \beta < \alpha \end{cases}$$

Το χωρίο που περιγράφεται από το πιο πάνω σύστημα περιστρέφεται κατά π ακτίνια γύρω από των άξονα των τετμημένων. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με

$$V = \frac{4}{3}\pi\alpha(\alpha^2 - \beta^2)\ \kappa.\mu.$$

(μονάδες 5)

Β2. Σε ένα Λύκειο επτά (7) τελειόφοιτοι μαθητές/τριες ενοικίασαν τέσσερα (4) διθέσια μηχανάκια.

(α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν στα μηχανάκια οι επτά τελειόφοιτοι, αν:

i. σε κάθε θέση οδηγού πρέπει απαραίτητα να υπάρχει μαθητής/τρια
ii. η Αργυρώ και ο Δημήτρης ξέχασαν να φέρουν το δίπλωμα οδήγησής τους, άρα δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού.

(μονάδες 6)

(β) Δεδομένου ότι η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού, να βρείτε την πιθανότητα η Γεωργία και ο Μάριος να καθίσουν στο ίδιο μηχανάκι. **(μονάδες 4)**

Β3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4\alpha x,\ \alpha > 0$. Παίρνουμε σημεία Γ και Δ πάνω στη διευθετούσα της, με $y_\Gamma > 0$, έτσι ώστε η γωνία $\Gamma E \Delta$ να είναι ορθή, όπου E η εστία της παραβολής. Από τα Γ και Δ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα της παραβολής, οι οποίες τέμνουν την παραβολή στα σημεία $A(\alpha t^2, 2\alpha t)$ και $B(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$, αντίστοιχα.

(α) Να αποδείξετε ότι η AB είναι εστιακή χορδή. **(μονάδες 4)**

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A έτσι ώστε το τραπέζιο $AB\Delta\Gamma$ να έχει ελάχιστο εμβαδόν. (Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $E = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}$)

(μονάδες 6)

Β4. Το 15% του ανθρώπινου πληθυσμού έχει ψηλό δείκτη νοημοσύνης (I.Q.).

(α) Επιλέγουμε στην τύχη 10 άτομα από αυτόν τον πληθυσμό. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:

Α: «Ανάμεσα στα 10 άτομα υπάρχουν ακριβώς 4 με ψηλό I.Q.»
Β: «Ανάμεσα στα 10 άτομα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ψηλό I.Q.»
(μονάδες 7)

(β) Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος ατόμων που πρέπει να επιλέξουμε τυχαία από τον πληθυσμό αυτό, ώστε η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο με ψηλό I.Q. να είναι μεγαλύτερη του 90%. **(μονάδες 3)**

Β5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα πιο κάτω:

i. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$
ii. $f(-2) = -4\sqrt{e},\quad f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}},\quad f(1) = -\frac{1}{e},\quad f(2) = 0$
iii. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$
iv. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$
v. $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$
vi. $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$

Δίνεται επίσης ο πίνακας προσήμων των συναρτήσεων f, f' και f''

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{2}{5}$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Σελίδα 5 από 5

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ 2023

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2023

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
8:00 – 11:00

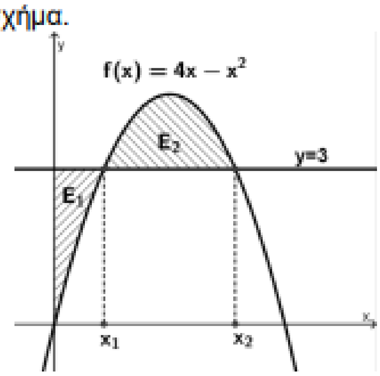
ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.
Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^{x}\,(1+e^{x})^{4}\,dx$$

Α2. Η ευθεία $y=3$ τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4x-x^2$ στα σημεία με τετμημένες x_1 και x_2 και σχηματίζει τα χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E_1. **(μονάδες 2)**

(β) Να δείξετε ότι τα χωρία E_1 και E_2 είναι ισεμβαδικά. **(μονάδες 3)**

Σελίδα 1 από 5

Α3. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=7}^{100} \kappa^2$$

Α4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \kappa\, \sigma\upsilon\nu x - \kappa^2\, \eta\mu x + 1,\ \kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$. Αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

(α) να βρείτε την τιμή του κ **(μονάδες 2)**

(β) να βρείτε τιμή ξ, για την οποία ικανοποιείται το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(μονάδες 3)**

Α5. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 1 - x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}dx = \int_0^1 x^{\lambda}(1-x)^{\kappa}dx \qquad \kappa, \lambda \in \mathbb{N}$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x(1-x)^{10}dx$$

Α6. Πάνω σε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ ορίζουμε 10 σημεία, όλα διαφορετικά από τις κορυφές του $Α, Β, Γ$ και $Δ$. Να βρείτε το πλήθος των τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές από τα 40 αυτά σημεία.

Α7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(2,4)$. Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,2]$,

(α) να δείξετε ότι $f(x) \leq 2x,\ \forall x \in [0,2]$ **(μονάδες 3)**

(β) να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx \leq 4$ **(μονάδες 2)**

Α8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = τοξεφx, \quad x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

(μονάδες 1,5)

(β) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int τοξεφx \, dx$$

(μονάδες 3,5)

Α9. Δίνεται κύκλος (C) ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες των τετμημένων και τεταγμένων ευθύγραμμα τμήματα μήκους 6 και 8 μονάδων αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (C) είναι $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

(μονάδες 2)

(β) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $T(x, y)$ του επιπέδου του οποίου η απόσταση από τον άξονα των τεταγμένων είναι ίση με το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο T προς τον κύκλο (C).

(μονάδες 3)

Α10. Δίνεται η λέξη **Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Ε Σ.**

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(μονάδες 1)

(β) Σε πόσους από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:

i) τα δύο «**Ε**» είναι σε συνεχόμενες θέσεις και ταυτόχρονα τα δύο «**Ι**» είναι σε μη συνεχόμενες θέσεις.

(μονάδες 2)

ii) υπάρχουν ακριβώς δύο γράμματα μεταξύ των δύο «**Ε**» τα οποία είναι και τα δύο σύμφωνα. **(μονάδες 2)**

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

(μονάδες 2)

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

(μονάδες 6)

(γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f.

(μονάδες 2)

Β2. Δίνεται έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$, $\gamma>0$, μεγάλο άξονα $A'A$ και μικρό άξονα $B'B$, τέτοια ώστε η γωνία $E'BE$ είναι ορθή.

(α) Να υπολογίσετε την εκκεντρότητα της έλλειψης. **(μονάδες 2)**

(β) Αν οι διευθετούσες της έλλειψης έχουν εξισώσεις $x=\pm4\sqrt{2}$ να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. **(μονάδες 2)**

(γ) Αν η εξίσωση της έλλειψης είναι η $x^2+2y^2=16$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων BE, AE και της γραφικής παράστασης της έλλειψης στο πρώτο τεταρτημόριο, περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων. **(μονάδες 6)**

Β3. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο, η οποία ικανοποιεί την σχέση:

$$x^2\cdot f(x)=x+\int_1^x t\cdot f(t)dt,\qquad \forall x>0$$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(1)=1$. **(μονάδες 1)**

(β) Να αποδείξετε ότι $\forall x>0$ ισχύει: **(μονάδες 4)**

$$x\cdot f'(x)+f(x)=\frac{1}{x}$$

(γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. **(μονάδες 5)**

Σελίδα 4 από 5

B4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και η εστιακή χορδή AB όπου $A(t^2, 2t), t > 0$ και $B(\rho^2, 2\rho)$. Από τα σημεία A και B φέρουμε κάθετες προς την διευθετούσα της παραβολής, την οποία τέμνουν στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι $t\rho = -1$ **(μονάδες 2)**

(β) Αν $S = (A\Gamma) + (B\Delta)$, να δείξετε ότι $S = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$. **(μονάδες 4)**

(γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου t ώστε το S να ελαχιστοποιείται. **(μονάδες 4)**

B5. Δίνονται τρία δοχεία με μπάλες. Το πρώτο και το δεύτερο δοχείο περιέχουν από μία κόκκινη και δύο άσπρες μπάλες το καθένα, ενώ το τρίτο δοχείο περιέχει τρεις άσπρες μπάλες. Όλες οι μπάλες του ίδιου χρώματος είναι όμοιες μεταξύ τους. Επιλέγουμε τυχαία ένα δοχείο και στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία από αυτό δύο μπάλες, χωρίς επανατοποθέτηση.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου οι δύο μπάλες να είναι άσπρες. **(μονάδες 3)**

(β) Αν γνωρίζουμε ότι οι δύο μπάλες που επιλέξαμε είναι άσπρες, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι κόκκινη.

(μονάδες 5)

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι από τις δύο μπάλες που επιλέξαμε, ακριβώς μία είναι άσπρη, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι άσπρη.

(μονάδες 2)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024-2025

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-12x,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα $x_1=-1$ και $x_2=2$. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α και β.

Α2. Δίνεται η λέξη «**ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**».

(α) i) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης υπάρχουν;
ii) Πόσοι από αυτούς έχουν όλα τα φωνήεντα συνεχόμενα;

(6 μονάδες)

(β) Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους αναγραμματισμούς της λέξης «**ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**». Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου A: «Ο αναγραμματισμός να αρχίζει και να τελειώνει με το γράμμα **Σ**».

(4 μονάδες)

Α3.(α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int x(x^2+3)^7\,dx$$

(4 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_3^4 \frac{5}{x^2+x-6}\,dx$$

(6 μονάδες)

Α4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\tau o\xi\eta\mu(4x)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης f.

(4 μονάδες)

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση.

(6 μονάδες)

Α5.(α) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχείς παραγώγους f', g' στο διάστημα Δ, να αποδείξετε ότι:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

(4 μονάδες)

(β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int x^2\cdot e^{-x}\,dx$$

(6 μονάδες)

Α6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f'(x)\cdot e^{f(x)}=\frac{2}{x}$ $x\in(1,+\infty)$ και $f(e)=ln3$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=ln\,(1+2lnx)$. **(3,5 μονάδες)**

(β) Να αποδείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(1,+\infty)$.

(3 μονάδες)

(γ) Αφού βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A\big(1,f(1)\big)$ και $B\big(e,f(e)\big)$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x-1}{e-1}\leq\frac{ln(1+2lnx)}{ln3},\qquad\forall\,x\in(1,e)$$

(3,5 μονάδες)

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Οι ασκήσεις Β1 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία ενώ η άσκηση Β2 βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1. Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, το πρόσημο της πρώτης και της δεύτερής της παραγώγου μεταβάλλεται όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	ǁ	$-$	0	$+$	
$f''(x)$			$-$		ǁ		$+$		

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(3 μονάδες)

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(1,5 μονάδες)

(γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

(6,5 μονάδες)

(δ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f. **(4 μονάδες)**

Β2. Σε μια κληρωτίδα υπάρχουν 10 πανομοιότυπες σφαίρες. Τρεις από αυτές περιέχουν δώρο. Πρώτα η Μαρία και μετά ο Κώστας, παίρνουν στην τύχη από μία σφαίρα, αποκαλύπτουν το περιεχόμενό της και δεν την τοποθετούν πίσω στην κληρωτίδα. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: «Τόσο η Μαρία όσο και ο Κώστας κερδίζουν δώρο.» **(2 μονάδες)**

Β: «Ο Κώστας κερδίζει δώρο.» **(3 μονάδες)**

Γ: «Η Μαρία δεν κερδίζει δώρο δεδομένου ότι ο Κώστας κερδίζει δώρο.» **(3 μονάδες)**

Δ: «Τουλάχιστον ένας από τους δύο δεν κερδίζει δώρο.» **(2 μονάδες)**

Β3. Δίνεται η παραβολή C_1 με εξίσωση $y^2 = 8x$. Στο σημείο της $A(2t^2, 4t)$, $t > 0$, φέρουμε την κάθετη της παραβολής, η οποία τέμνει τους άξονες των τετμημένων και τεταγμένων στα σημεία B και Γ αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της παραβολής στο σημείο της $A(2t^2, 4t)$ είναι η $tx + y = 2t^3 + 4t$.

(2 μονάδες)

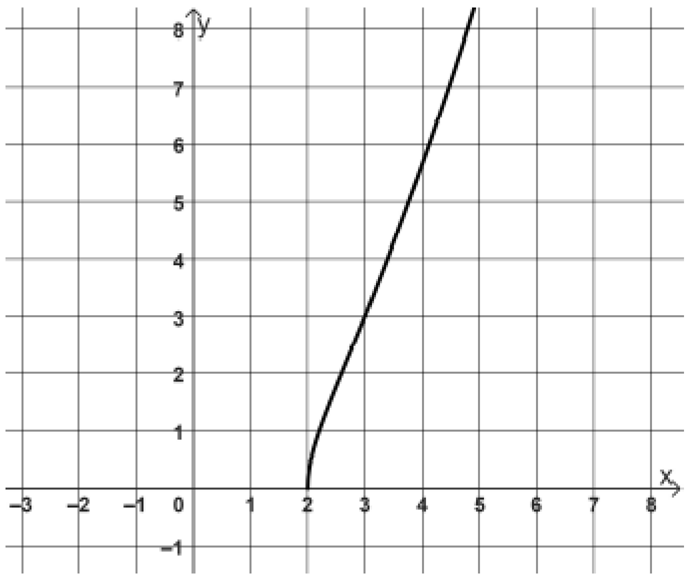
(β) Αν M το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$, να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης C_2 στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M είναι η $y = x\sqrt{x-2}$.

(5 μονάδες)

(γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της καμπύλης C_2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες C_1, C_2 και τον άξονα των τετμημένων.

(8 μονάδες)

Σημείωση: Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε το σχήμα στο τετράδιο απαντήσεων.



ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ 2025

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Δίνεται παραβολή με κορυφή το σημείο $O(0,0)$ και εστία το σημείο $E(2,0)$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της παραβολής.

(Μονάδες 2)

β) Την εξίσωση της διευθετούσας της παραβολής.

(Μονάδα 1)

γ) Τις παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής.

(Μονάδες 2)

Α2. Να βρείτε πραγματικούς αριθμούς α, β και γ, για τους οποίους να ισχύει:

$$\int (\alpha e^x - \beta \eta\mu 2x + \gamma)\, dx = e^x + \sigma\upsilon\nu 2x - x + c$$

(Μονάδες 5)

Α3. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (3\kappa^2 - 3\kappa + 1) = \nu^3$$

(Μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=11}^{100} (3\kappa^2 - 3\kappa + 1)$$

(Μονάδες 2)

Α4. Δίνονται τα ψηφία: $1, 1, 2, 3, 3, 4$.

α) Να υπολογίσετε το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία.

(Μονάδες 2)

β) Πόσοι από αυτούς έχουν τα δύο τριάρια σε διαδοχικές θέσεις (*παράδειγμα ενός τέτοιου αριθμού είναι:* 133241);

(Μονάδες 2)

γ) Πόσοι από τους εξαψήφιους αριθμούς του υποερωτήματος **(α)** δεν περιέχουν τον αριθμό έντεκα;

(Μονάδα 1)

Α5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^5 - 3x^3 + 4x + 7 = 0$, έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα (λύση) στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Α6. α) Έστω ότι η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει ότι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$.

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξημ}(\text{συν}x) + x$ είναι σταθερή στο $[0,\pi]$.

(Μονάδες 2)

Α7. Έστω T το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^3$ και $y = \sqrt{x},\ x \geq 0$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου T.

(Μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου T γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

(Μονάδες 2)

Α8. Σε κώνο με ακτίνα $2\ \text{m}$ και ύψος $5\ \text{m}$, εγγράφεται κύλινδρος. Να υπολογίσετε το ύψος και την ακτίνα του κυλίνδρου, ώστε ο όγκος του κυλίνδρου να είναι μέγιστος.

(Μονάδες 5)

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας της, τα τοπικά της ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της και να την παραστήσετε γραφικά.

(Μονάδες 10)

Β2. α) Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -u$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)\,dx$$

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx = 0$$

(Μονάδες 2)

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + e^{\eta\mu x}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\eta\mu x}}{1 + e^{\eta\mu x}}\,dx = \pi$$

(Μονάδες 5)

Β3. Τέσσερις αθλητές της καλαθόσφαιρας, ο Ανδρέας, ο Βασίλης, ο Γιάννης και ο Δημήτρης, ρίχνουν με τη σειρά μια βολή στο ίδιο καλάθι με ποσοστό ευστοχίας, 5%, 15%, 30% και 40%, αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την πιθανότητα να είναι εύστοχες και οι τέσσερις βολές.

(Μονάδες 2)

β) Να βρείτε την πιθανότητα να είναι άστοχες και οι τέσσερις βολές.

(Μονάδες 3)

γ) Αν οι τρεις βολές από τις τέσσερις είναι εύστοχες, να βρείτε την πιθανότητα αυτές να είναι οι βολές του Ανδρέα, του Βασίλη και του Γιάννη.

(Μονάδες 5)

Β4. Δίνεται ο κύκλος (K) με εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$ και $A(R\sigma\upsilon\nu\theta, R\eta\mu\theta)$, $\theta \in (0, \pi)$ τυχαίο σημείο του. Φέρουμε ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη με την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A.

α) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο στα σημεία $B(-R\eta\mu\theta, R\sigma\upsilon\nu\theta)$ και $\Gamma(R\eta\mu\theta, -R\sigma\upsilon\nu\theta)$.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι, η εξίσωση του σχήματος στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της χορδής AB είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(Μονάδες 6)

Β5. Έστω συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 4$ και $f(0) = 1$.

α) Αν $u(x) = f'(x) - 2f(x)$, να αποδείξετε ότι $u'(x) - 3u(x) = 0$.

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι $u(x) = 2e^{3x}$.

(Μονάδες 3)

γ) Να αποδείξετε ότι $\left(e^{-2x}f(x)\right)' = 2e^{x}$.

(Μονάδες 2)

δ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 2)