

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

- Τυπολόγιο
- Επαναληπτικές ασκήσεις
- Ενιαία Τελική Προαγωγική Γραπτή Εξέταση 2023-2024
- Δειγματική Ενιαία Τελική Γραπτή Εξέταση 2023-2024
- Ενιαία Τελική Προαγωγική Γραπτή Εξέταση 2024-2025

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

$$\alpha = 2R\eta\mu A$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$$

ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ: Μαθηματικά Β' Λυκείου, Κατεύθυνσης (Α' Τεύχος), Έκδοση ΥΑΠ 2021
 Μαθηματικά Β' Λυκείου, Κατεύθυνσης (Β' Τεύχος), Έκδοση ΥΑΠ 2021
 Μαθηματικά Β' Λυκείου, Κατεύθυνσης (Γ' Τεύχος), Έκδοση ΥΑΠ 2021

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ – ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

1. Να αποδείξετε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός αριθμός, τότε και ο $4n^3 + 2n - 1$ είναι περιττός.
2. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός $\alpha^2 + 2\alpha - 5$, ($\alpha \in \mathbb{Z}$) είναι περιττός, τότε ο αριθμός α είναι άρτιος.
3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει περιττός ακέραιος αριθμός, ο οποίος να εκφράζεται ως άθροισμα τριών άρτιων ακεραίων.
4. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:
 - (α) $2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 - (β) $3 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 4^3 + \dots + 3 \cdot n^3 = \frac{3 \cdot n^2(n+1)^2}{4}$
 - (γ) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$
 - (δ) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
5. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $7^{2n} + 16n - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 64 $\forall n \in \mathbb{N}$.
6. Να δείξετε ότι $\forall n \geq 2$ ο αριθμός $9^{n-2} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ Ι – ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΙΙ

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$ που έχει πλευρές $\alpha = 2 \text{ cm}$, $\beta = 2 \text{ cm}$ και $\gamma = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.
2. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\alpha = 6 \text{ m}$, $\beta = 6\sqrt{3} \text{ m}$ και εμβαδόν $E = 9\sqrt{3} \text{ m}^2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του ($\hat{\Gamma} < 90^\circ$) και την πλευρά του γ .
3. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{B} = 60^\circ$ και $\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{3}}$.
 - (α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ .
 - (β) Να δείξετε ότι $E = \frac{\beta^2 \cdot \sqrt{3}}{6}$, όπου E το εμβαδόν του τριγώνου.

4. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η ισότητα: $\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$.
5. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $2E = R\beta\sigma\upsilon\nu(A - \Gamma)$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
6. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση: $\eta\mu A(\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma) = \frac{\beta + \gamma}{2R}$, να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο.
7. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$.

(α) Να δείξετε ότι: $(\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B)^2 + (\eta\mu A - \eta\mu B)^2 = 4\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2}$.

(β) Αν ισχύει η σχέση: $e^{\sigma\upsilon\nu(A+B)} \cdot e^{\sigma\upsilon\nu(A-B)} = 1$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

8. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha$

9. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

(α) $2\sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x - 2\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu 4x}{2}$

(β) $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta) \cdot \eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \beta} = \varepsilon\varphi^2 \alpha - \varepsilon\varphi^2 \beta$

(γ) $\frac{\sigma\upsilon\nu 2x \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu 4x)}{\eta\mu 4x \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu 2x)} = \sigma\varphi x$

(δ) $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\theta - 2\sigma\upsilon\nu \theta + 1}{\eta\mu 2\theta - 2\eta\mu \theta} = \sigma\varphi \theta$

(ε) $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{2\varepsilon\varphi \alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu \alpha} = \tau\varepsilon\mu^2 \frac{\alpha}{2}$

(στ) $\frac{\sigma\upsilon\nu \alpha + \eta\mu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha - \eta\mu \alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha - \eta\mu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha + \eta\mu \alpha} = 2\varepsilon\varphi 2\alpha$

(ζ) $\frac{1 + \eta\mu 2\theta - \eta\mu^2 \theta + \sigma\upsilon\nu^2 \theta}{1 + \eta\mu 2\theta - \sigma\upsilon\nu 2\theta} = \sigma\varphi \theta$

(η) $\frac{\eta\mu 4x}{1 + \sigma\upsilon\nu 4x} \cdot \left(\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\eta\mu x} + \frac{\eta\mu 3x}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = 2$

10. (α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}$.

(β) Με τη βοήθεια του πιο πάνω τύπου ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi 15^\circ$.

11. Αν $\varepsilon\phi\alpha = 3\varepsilon\phi\beta$ να δείξετε ότι: $\varepsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\eta\mu^2\beta}{1+2\eta\mu^2\beta}$

12. Αν $y = \frac{\pi}{4} - 2x$ να δείξετε ότι :

(α) $\varepsilon\phi y = \frac{1-2\varepsilon\phi x-\varepsilon\phi^2 x}{1+2\varepsilon\phi x-\varepsilon\phi^2 x}$

(β) Από την (α) να δείξετε ότι: $\varepsilon\phi^2 \frac{\pi}{8} + 2\varepsilon\phi \frac{\pi}{8} - 1 = 0$

(γ) Από το (β) να δείξετε ότι: $\varepsilon\phi \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

13. Να βρείτε την γενική λύση των εξισώσεων:

(α) $\eta\mu(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (β) $\sigma\upsilon\nu 2x = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$ (γ) $\eta\mu^2 2x - 8\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$

(δ) $\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 4x = 1$ (ε) $\sigma\upsilon\nu^4 x - \eta\mu^4 x = 1$

14. Να λύσετε την εξίσωση: $4\eta\mu^2 x = \varepsilon\phi x$, $x \in [0, 2\pi]$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $|2x - 1| = 7$ (β) $|x + 3| + 7 = 0$ (γ) $3|x - 1| = x + 5$

(δ) $\sqrt{(x-2)^2} = 6$ (ε) $|x - 4| - |x + 1| = 0$ (στ) $x^2 - 3|x| - 4 = 0$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $|4x - 3| < 5$ (β) $|x - 1| > 3$

(γ) $|2x - 1| < |x - 2|$ (δ) $2 < |x - 3| \leq 6$

3. Αν $|x - 2| < 3$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = 3|x - 5| - 3|x + 1|$

4. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ αν:

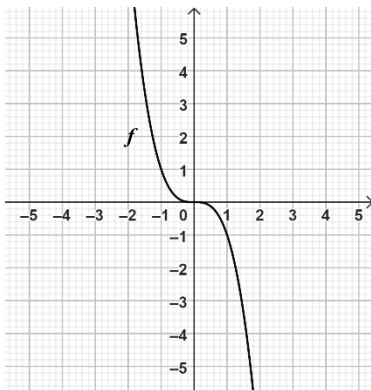
$$|\alpha - 2| + |3\beta + 9| + |2\alpha + \beta - 2\gamma| = 0.$$

5. Αν $|x + 12\psi| < |3x + 4\psi|$ να δείξετε ότι: $|\frac{\psi}{x}| < \frac{1}{4}$.

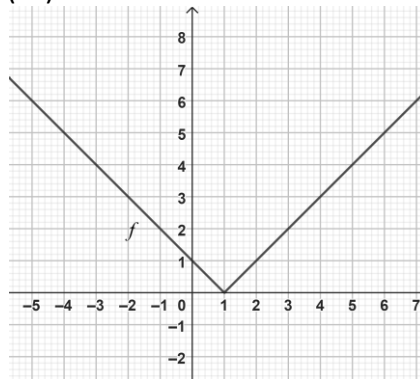
6. Αν $|a|\beta| - \beta|a|| = 2|a| \cdot |\beta|$ και $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, τότε οι α, β είναι ετερόσημοι αριθμοί.
7. Να γράψετε τον ορισμό για να είναι μια συνάρτηση άρτια. Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία.
8. (α) Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, περιττές ή κανένα από τα δύο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(i) $f(x) = 3x^5 - 5x^7, x \in \mathbb{R}$ (ii) $g(x) = 2x^5 \cdot \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ (iii) $h(x) = |x| + 2x^4, x \in \mathbb{R}$
 (iv) $k(x) = \sqrt{x-2}, x \in [2, +\infty)$ (v) $m(x) = |x-1| + |x+1|, x \in \mathbb{R}$

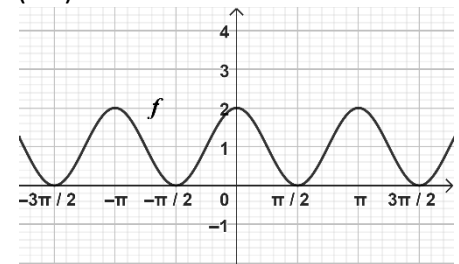
(vi)



(vii)



(viii)



(β) Ποιες από τις (vi), (vii), (viii) είναι 1-1;

9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{4x}{3x-1}$ (β) $f(x) = \frac{5x+2}{x^2-5x+6}$ (γ) $f(x) = \sqrt{2x+4}$
 (δ) $f(x) = \sqrt{|x|-2} + \frac{x}{\sqrt{4-x}}$ (ε) $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x-3}}$ (στ) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-5}$

10. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$ (β) $f(x) = 4 - 3\sin x$ (γ) $f(x) = 3 - |x-2|$
 (δ) $f(x) = 4 + 3x - x^2$ (ε) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}, x \geq 4$ (στ) $f(x) = \sqrt{x^4+9}$

11. Δίνεται η συνάρτηση

$f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in (-2,0] \\ x^2+2, & x \in (0,2] \end{cases}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

12. Να παραστήσετε γραφικά την πολλαπλού τύπου συνάρτηση $f(x) = x - |x - 2|$, $x \in \mathbb{R}$.

13. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις και να βρείτε το σύνολο τιμών.

(α) $f(x) = |x - 2| - x$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) $f(x) = |x + 1|$, $x \in \mathbb{R}$.

14. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} ώστε να είναι $f = g$.

(α) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}$ (β) $f(x) = |x| - 3$ και $g(x) = \frac{x^2-9}{|x-2|+5}$

15. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g , με τύπους $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

(α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g .

(β) Να εξετάσετε εάν η f είναι άρτια, περιττή ή τίποτα από τα δύο.

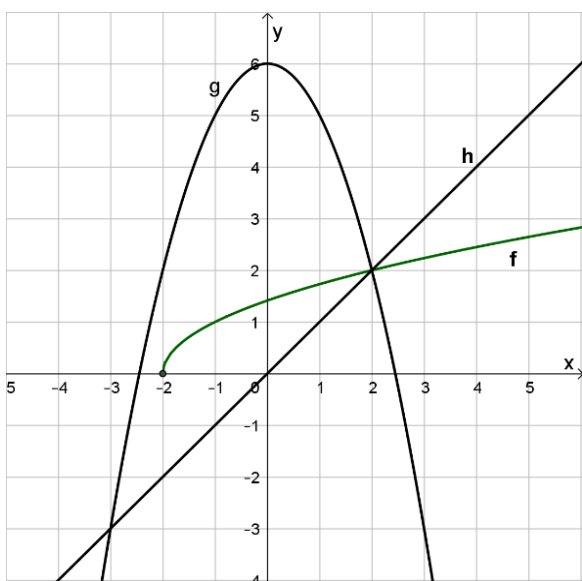
(γ) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

(δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

16. Αν $f(x) = x^2 + 3$ και $g(x) = \sqrt{x-4}$ να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$ και $f \circ f$.

17. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων:

$f: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. $g: B \rightarrow (-\infty, 6]$.



Από το διάγραμμα των γραφικών παραστάσεων:

(α) να υπολογίσετε τις τιμές, αν υπάρχουν,

$(g + f + h)(-1)$ $(g - f)(-3)$

$(h \circ g)(-1)$ $(h \circ h)(2)$

$(f \circ f^{-1})(6)$ $(f \circ h)(-3)$

(β) να βρείτε για ποια τιμή του x ισχύει η σχέση:

$g(x) = f(x) = h(x)$

(γ) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{h}$

18. Να γράψετε τον ορισμό για να είναι μια συνάρτηση 1-1. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία.

19. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων της μορφής $f: A \rightarrow f(A)$, όπου A το πεδίο ορισμού. Στις περιπτώσεις που ορίζεται, να την προσδιορίσετε.

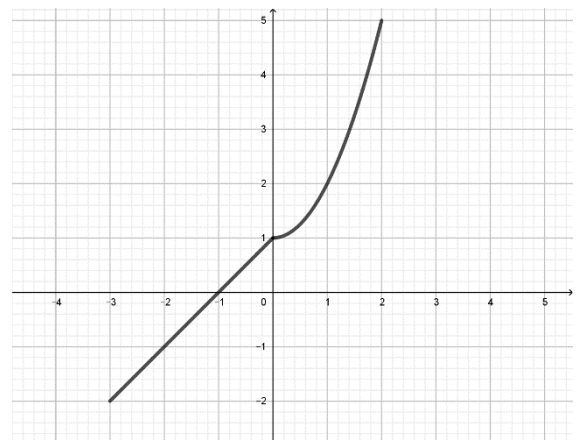
(α) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}, x > 3$ (β) $f(x) = \sqrt{x-3}$ (γ) $f(x) = x^2 - 6x + 10, x < 3$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, με $f(R) = R$ για την οποία ισχύει:

$$(f(x))^3 - x = 1 - f(x), \forall x \in R$$

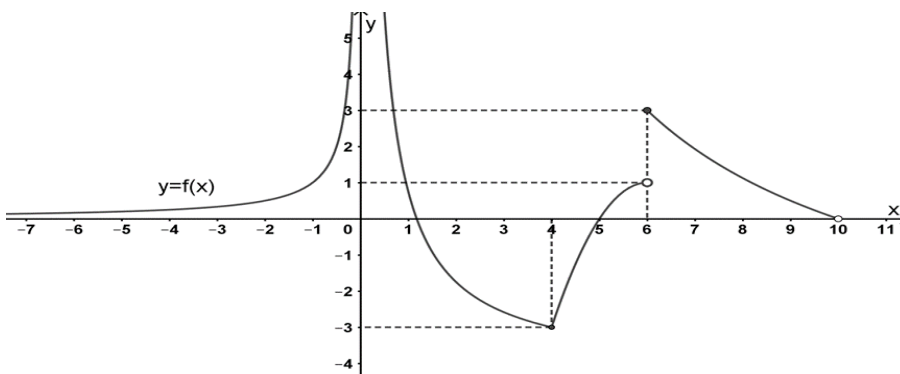
- (α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- (β) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x) = x^3 + x - 1$
- (γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.

21. Στο πιο κάτω σχήμα είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να κάνετε την γραφική παράσταση της f^{-1} , να βρείτε το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.



ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Πιο κάτω είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της f .

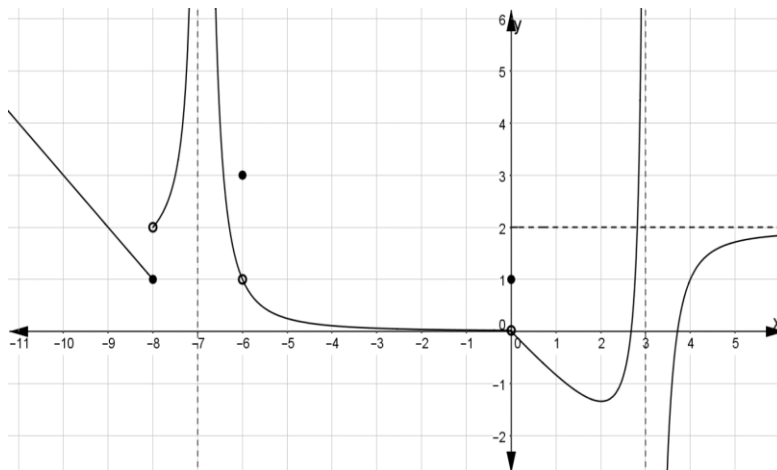


(α) Με τη βοήθεια του πιο πάνω διαγράμματος να βρείτε τα ακόλουθα όρια (αν υπάρχουν):

(i) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) =$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) =$ (iii) $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) =$
 (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ (v) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) =$ (vi) $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) =$

(β) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x = 0, x = 4, x = 6$.

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



(α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακόλουθα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow -8^-} f(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -8^+} f(x)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

(v) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2]^3$

(viii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$

(ix) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{f(x)}$

(β) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x = -8$, $x = -7$, $x = -6$, $x = 0$, $x = 3$.

3. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \alpha^2 + 5$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7\alpha - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ να βρείτε την τιμή του α .

4. Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται στο \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = -3$.
Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια.

(α) $\lim_{x \rightarrow 5} (2f(x) + 5g(x))$

(β) $\lim_{x \rightarrow 5} (2 \cdot f(x) - 8 \cdot g(x))$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 5} (f^3(x) \cdot g(x) + \sqrt{8f(x)})$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[5]{16f(x)}}{|g(x)|}$

5. Να βρείτε τα όρια των πιο κάτω συναρτήσεων αν υπάρχουν:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 4x}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 3)^7$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 5}}{9 - x^2}$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}$

(ε) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|3-x| + x^2 - 9}{x-3}$

(στ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x|x-1|}{x-1}$

6. Να βρείτε τα όρια των πιο κάτω συναρτήσεων αν υπάρχουν:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{4 - 5x^2}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-6}{x-3}$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{8x^2 + 3}}{x}$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x^2 + 4x}$$

$$(\zeta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{4x^2}$$

$$(\eta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\eta\mu x}{x+1} \right)$$

$$(\theta) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9 + |3-x|}{x-3}$$

7. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\frac{x^2 + x}{x} \leq f(x) \leq \frac{(x^2 + x)\eta\mu(x-1)}{x^2 - x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}.$$

Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+2}$$

8. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 3x) = 5$, να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 5x^2 + 4}{x^2f(x) + 3x^3 - 6x^2 + 1} = -2$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}$. Να υπολογίσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < -1 \\ ax^2 + \beta, & x \geq -1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$.

11. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{x-4}, & x \neq 4 \\ 5, & x = 4 \end{cases}$, στο σημείο $x_0 = 4$.

12. Να εξετάσετε την πιο κάτω συνάρτηση ως προς τη συνέχεια:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 3 \\ x+4, & 3 \leq x < 8 \\ x-1, & x \geq 8 \end{cases}$$

13. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x, & x < 2 \\ -2, & x = 2 \\ x^3 + \beta x^2 + 2a, & x > 2 \end{cases}$$

14. (α) Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2\sin x - x - 1 = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{3})$.

(γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{10} + x^2 - 1 = 0$, έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \eta\mu^2 x$, $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει $\xi \in [0, \pi]$ ώστε να ισχύει $f(\xi) = 3$.

16. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 3x + 1, x \in [1, 6]$

(β) $f(x) = x^2 + 1, x \in [-1, 2]$

(γ) $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \in [-1, 3]$

17. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 4]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 4]$, τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(2) + 4f(4)}{5}.$$

18. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{7f(\alpha) + 3f(\beta)}{10}.$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1. Δίνεται η ακολουθία για την οποία ισχύει: $a_1 = -4$ και $a_{v+1} = a_v + 1$. Να βρείτε τους 4 πρώτους όρους της και να την παραστήσετε γραφικά.

2. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω ακολουθίες:

(α) $a_v = 2v - 3, v \in \mathbb{N}$

(β) $a_v = 3^v, v \in \mathbb{N}$

(γ) $a_v = \frac{4}{v+1}, v \in \mathbb{N}$

3. (α) Να βρείτε την τιμή του x για τις οποίες οι αριθμοί $x - 4, x + 4, 3x - 4$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(β) Αν ο $x - 4$ είναι ο δεύτερος όρος της αριθμητικής προόδου να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της προόδου.

4. Αν $x - 2$, x , $x + 3$ είναι τρεις πρώτοι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου, να υπολογίσετε την τιμή του x και τον έκτο όρο της.
5. Το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο: $\Sigma_n = 2^{n+1} - 2$, $n \in \mathbb{N}$
 (α) Να δείξετε ότι $a_n = 2^n$.
 (β) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.
6. Σε αριθμητική πρόοδο ο δεύτερος και ο πέμπτος όρος έχουν άθροισμα 27, ενώ ο τέταρτος και ο έκτος όρος έχουν άθροισμα 36. Να σχηματίσετε την αριθμητική πρόοδο.
7. Ο τρίτος όρος αριθμητικής προόδου είναι 1 και ο έκτος όρος 7. Πόσους όρους πρέπει να προσθέσουμε για να έχουμε άθροισμα 60.
8. Έστω γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο όγδοος όρος της είναι ίσος με $\frac{1}{2}$. Να βρείτε το δέκατο πέμπτο όρο και το άθροισμα των απείρων όρων της προόδου.
9. Το άθροισμα των 2 πρώτων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου, με $\lambda < 0$, είναι 9 και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 12. Να σχηματίσετε την πρόοδο και να υπολογίσετε το άθροισμα όλων των αρνητικών όρων της.
10. Σε Φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδο (Φ.Γ.Π) ο πρώτος όρος της είναι τριπλάσιος του λόγου της και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 6. Να γράψετε τους 4 πρώτους όρους της προόδου.
11. Φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος (Φ.Γ.Π) και Αριθμητική Πρόοδος (Α.Π) έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της Α.Π ισούται με το λόγο της Γ.Π. Ο πέμπτος όρος της Α.Π είναι ίσος με -1 και το άθροισμα των απείρων όρων της Γ.Π είναι ίσο με το δεύτερο όρο της Α.Π. Να σχηματίσετε τις προόδους.
12. Σε αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\delta = 3$ ισχύει ότι $a_{\kappa+\lambda} = a_{\kappa} + a_{\lambda}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$. Να βρείτε το άθροισμα των 31 πρώτων όρων της πιο πάνω προόδου.
13. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με α και το άθροισμα των κ πρώτων όρων είναι μηδέν ($\Sigma_{\kappa} = 0$). Να δείξετε ότι το άθροισμα των επόμενων μ όρων είναι: $\Sigma_{\mu} = \frac{\alpha \cdot \mu \cdot (\kappa + \mu)}{(1 - \kappa)}$.
14. Φθίνουσα Γεωμετρική πρόοδος (Φ.Γ.Π) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = \eta\mu 4\theta$ και λόγο $\lambda = \sigma\upsilon\nu 4\theta$. Να δείξετε ότι το άθροισμα των απείρων όρων της είναι $\Sigma_{\infty} = \sigma\varphi 2\theta$.
15. (α) Να βρείτε το άθροισμα: $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots$.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left[6 \cdot \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots \right) \right]^{2 \log_5 x} = \log 1000^x + 4$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου, που έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα A και B ευθύγραμμου τμήματος AB .
2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου, που έχουν την ιδιότητα να απέχουν σταθερή απόσταση R από ένα δεδομένο σταθερό σημείο K του επιπέδου.
3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου, που έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τις πλευρές μιας κυρτής γωνίας.
4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου, που έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2) του επιπέδου.
5. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου, που έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν σταθερή απόσταση d από ευθεία (ε) του επιπέδου.
6. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B .
7. Δίνεται ένας κύκλος (O, ρ) .
 - (α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων M των ακτίνων του κύκλου.
 - (β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων M των χορδών του κύκλου (O, ρ) που είναι παράλληλες προς μια διάμετρο AB αυτού.

ΕΝΟΤΗΤΑ 8: ΕΚΘΕΤΙΚΗ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να δείξετε ότι η παράσταση: $\frac{\ln \sqrt{\alpha^3} + \ln \sqrt{\beta^3} - \ln \sqrt{\gamma^3}}{2 \ln(\alpha \cdot \beta) - \ln \gamma^2}$ $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$ έχει σταθερή τιμή.
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

<p>(α) $4^{x-1} = 8^x$</p> <p>(γ) $3^{x+1} + 9 = 30 \cdot 3^x$</p> <p>(ε) $3^{2x+1} + 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x = 0$</p> <p>(ζ) $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 3^{2x} = 4 \cdot 9^x - 2^{2x}$</p>	<p>(β) $2^{x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$</p> <p>(δ) $4^{3x+1} = 32$</p> <p>(στ) $4^x + 2^{x+3} = 3 \cdot 2^{x+1} + 3$</p> <p>(η) $(x+5)^{x^2+4x-5} = 1$</p>
--	---

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(α) \log x - \log(x - 8) = 1 - \log 2$$

$$(β) \log \left(\log \left(\frac{3x+3}{x-6} \right) \right) = 0$$

$$(γ) 3 \log^2 x = \log \left(\frac{100}{x} \right)$$

$$(δ) 2 \log x + \log(3x + 2) = \log(4x^2 + 48) - \log 2$$

$$(ε) (x + 2)^{\log(x+2)} = \frac{(x+2)^3}{100}$$

$$(στ) x \cdot \log 3 + \log 71 = \log(5^x - 2 \cdot 3^x) + 3 \log 3$$

$$(ζ) \log(16^x - 12 \cdot 4^x - 63) = 0$$

$$(η) 3 \log 2 + \log(2^x + 3^x) - \log 5 = x \cdot \log 2 + \log 7$$

$$(θ) \log_5 x - 2 \log_x 5 = 1$$

$$(ι) x^{-1+\log_3 x} = 9$$

$$(κ) \log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1) \quad (λ) 5^{\log_2 x} + 5^{-1+\log_2 x} = 3^{1+\log_2 x} + 3^{-1+\log_2 x}$$

4. Να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a ώστε η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2-a}{2a-1} \right)^x$ να είναι εκθετική συνάρτηση.

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{\log(x+2)}{3^{x+1}-3^{-x+2}}$.

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = \ln \left(\frac{9-x^2}{x-1} \right)$$

$$(β) h(x) = \log_{x-3}(-x^2 + 7x - 10)$$

$$(γ) k(x) = \log_{\frac{6-x}{x+2}}(2-x)$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left(\frac{3-x}{3+x} \right)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 0$.

8. Οι παραστάσεις $\log(2^x - 1)$, $\log(2^x + 1)$, $2 \log 3$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (a_n) , $n \in \mathbb{N}$. Να υπολογίσετε τις τιμές του x .

9. Αν οι αριθμοί $\log 22$, $\log \sqrt{9 \cdot (2^x + 2 \cdot 3^x)}$, $x \log 3$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να υπολογίσετε το x .

10. Αν οι λύσεις της $\log_2 x \cdot (-1 + \log_2 x) = 2$ είναι ο πρώτος όρος (a_1) και ο λόγος (λ) φθίνουσας Γεωμετρικής Προόδου, να βρείτε το άθροισμα των άπειρων όρων της (Σ_∞) .

11. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln 2^x + \ln 4^x + \ln 8^x + \dots + \ln 128^x = 56 \ln 2$

12. Να λύσετε την εξίσωση: $\log x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \dots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = \frac{11}{2}$

13. Με βάση την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 5^x$, να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = -5^x$, (β) $g(x) = 5^x + 1$, (γ) $k(x) = 5^{x-2}$

14. Με βάση την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log_3 x$, να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

(α) $g(x) = 1 + \log_3 x$, (β) $h(x) = \log_3(x - 2)$ (γ) $k(x) = 2 + \log_3(x + 1)$

15. Ένας βιολόγος μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηρίων, παρατηρεί ότι ο αριθμός των βακτηρίων αυξάνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής. Ο αριθμός των βακτηρίων αρχικά ήταν 50, ενώ 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτήρια ήταν 3200.

(α) Να αποδείξετε ότι ο ο αριθμός των βακτηρίων $P(t)$ μετά από t ώρες, δίνεται από τον τύπο:

$$P(t) = 5 \cdot 8^{\frac{t}{2}}$$

με τον αριθμό των βακτηρίων να μετριέται σε δεκάδες.

(β) Να υπολογίσετε:

(i) τον αριθμό των βακτηρίων μετά από 6 ώρες

(ii) σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βακτηρίων είχε διπλασιαστεί.

16. Το πλήθος των ατόμων που θα μπορούσαν να θυμούνται τα σημαντικά σημεία μίας διάλεξης σε συνάρτηση με τον αριθμό x ημερών που πέρασαν από τη λήξη της διάλεξης, δίνεται από τον τύπο:

$$P(x) = \kappa - (\lambda + 2) \log_2 x, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

Μία μέρα μετά τη λήξη της διάλεξης 95 άτομα θα θυμούνται τα σημαντικά σημεία, ενώ 2 μέρες μετά τη λήξη της διάλεξης 65 άτομα θα θυμούνται τα σημαντικά σημεία.

(α) Να αποδείξετε ότι:

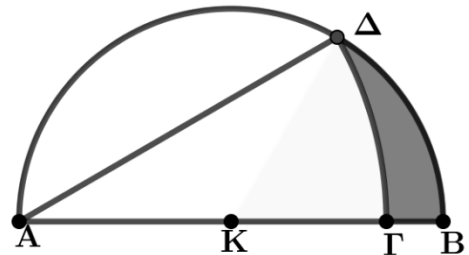
$$P(x) = 95 - 30 \log_2 x, \quad x > 0$$

(β) Να υπολογίσετε μετά από πόσες μέρες μόνο 5 ακροατές θα θυμούνται τα σημαντικά σημεία της διάλεξης.

ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΠΟΛΥΓΩΝΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

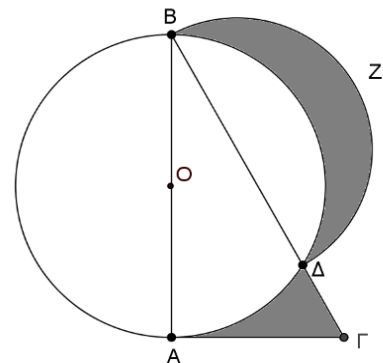
1. Αν ισχύει η σχέση: $E_4 - \lambda_3 \cdot \alpha_6 - \sqrt{2} \cdot \alpha_4 = 4$, να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.
2. Αν $AB = \lambda_3$ και $B\Gamma = \lambda_4$ είναι δυο διαδοχικές χορδές ενός κύκλου (O, R) να υπολογίσετε συναρτήσει του R , το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** του μικτόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από τις χορδές $AB, B\Gamma$ και το τόξο AG .

3. Δίνεται ημικύκλιο (K, R) διαμέτρου AB και η χορδή του AD τέτοια ώστε $AD = R\sqrt{3}$. Με κέντρο το A και ακτίνα την AD γράφουμε τόξο $\widehat{A\Gamma}$ που τέμνει την AB στο Γ . Να υπολογίσετε συναρτήσει του R το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** του μεικτόγραμμου τριγώνου $B\Gamma\Delta$.

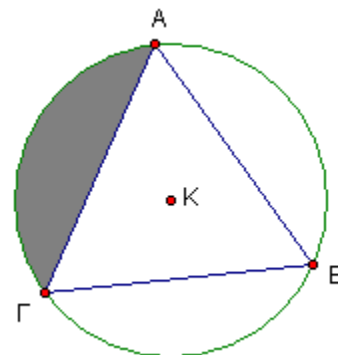


4. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2R$ και σημείο Γ στην ημιπεριφέρεια τέτοιο ώστε $A\Gamma = \frac{AB}{3}$. Οι εφαπτόμενες του ημικυκλίου στα A και B τέμνουν την εφαπτομένη του ημικυκλίου στο Γ στα σημεία P και Σ αντίστοιχα. Με κέντρα τα P και Σ και ακτίνες PA και ΣB αντίστοιχα, γράφουμε τόξα μέσα στο ημικύκλιο. Να υπολογίσετε το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του R .

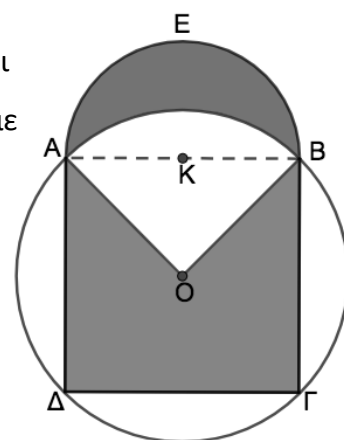
5. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και χορδή $B\Delta = \lambda_3$. Η $A\Gamma$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A . Το ημικύκλιο $BZ\Delta$ σχηματίζεται με διάμετρο τη $B\Delta$. Να βρείτε το **εμβαδόν** της σκιασμένης περιοχής, συναρτήσει της ακτίνας R .



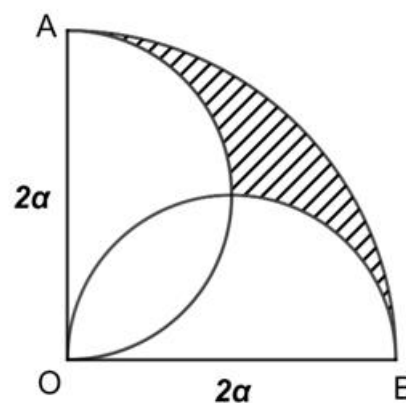
6. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, α) . Να υπολογίσετε το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** του σκιασμένου μέρους συναρτήσει του α .



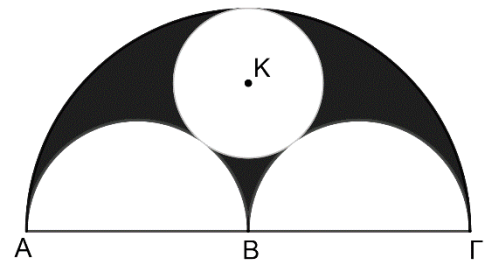
7. Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) , όπως φαίνεται στο πιο διπλανό σχήμα. Με διάμετρο την AB και κέντρο K , γράφουμε ημικύκλιο AEB έξω από τον κύκλο (O, R) .
 Να βρείτε (συναρτήσει του R) το **εμβαδόν** της σκιασμένης περιοχής.



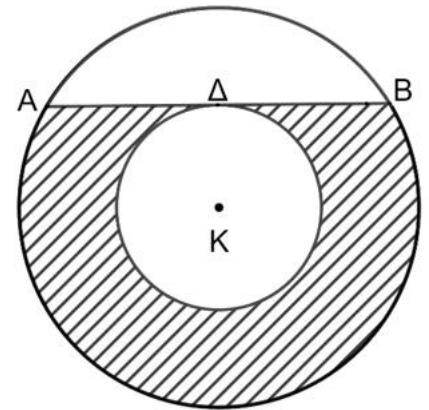
8. Δίνεται AOB τεταρτοκύκλιο ακτίνας 2α . Με διαμέτρους τις OA και OB γράφουμε ημικύκλια μέσα στο τεταρτοκύκλιο όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε το **εμβαδόν** της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας συναρτήσει του α .



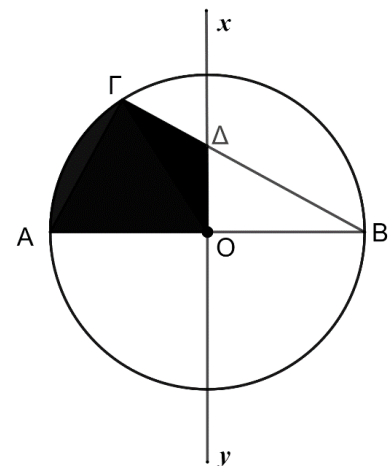
9. Με κέντρο το σημείο B και διάμετρο την $AG = 12\alpha$ γράφουμε ημικύκλιο. Μέσα στο ημικύκλιο γράφουμε δυο ημικύκλια με διαμέτρους τις AB και $B\Gamma$ και ένα κύκλο ο οποίος εφάπτεται στα τρία ημικύκλια, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
 (α) Αν R η ακτίνα του κύκλου, να δείξετε ότι $R = 2\alpha$.
 (β) Να βρείτε το **εμβαδόν** του σκιασμένου μέρους συναρτήσει του α .



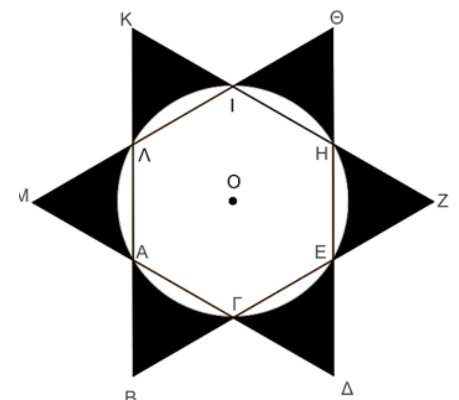
10. Στο διπλανό σχήμα δίνονται δυο ομόκεντροι κύκλοι (K, R) και (K, ρ) . Η $AB = \lambda_3 = 8\sqrt{3} \text{ cm}$ είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) στο Δ . Να βρείτε:
 (α) τις ακτίνες R και ρ των δύο κύκλων,
 (β) το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** του σκιασμένου μέρους.



11. Δίνεται κύκλος $(K, 5 \text{ cm})$, με διάμετρο AB και χορδή $B\Gamma = \lambda_3$. Η ευθεία xOy είναι κάθετη στην AB και τέμνει την $B\Gamma$ στο Δ .
 (α) Να δείξετε ότι $OD = \Delta\Gamma = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.
 (β) (i) Να βρείτε το **εμβαδόν** του μικτόγραμμου τετραπλεύρου $AO\Delta\Gamma$.
 (ii) Να βρείτε την **περίμετρο** του πιο διπλανού χωρίου.

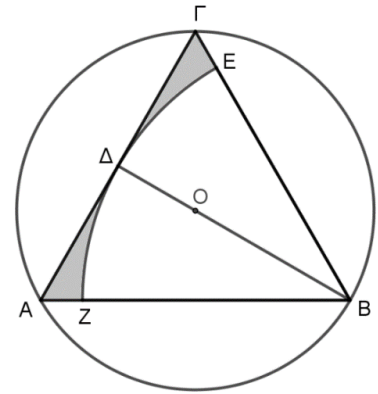


12. Δίνεται $AB\Gamma\Delta EZ$ κανονικό εξαγώνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 2 cm . Με τις πλευρές του κανονικού εξαγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα έξω από τον κύκλο. Να βρείτε:
 (α) Το **εμβαδόν** του γραμμοσκιασμένου μέρους.
 (β) την **περίμετρο** του γραμμοσκιασμένου μέρους.



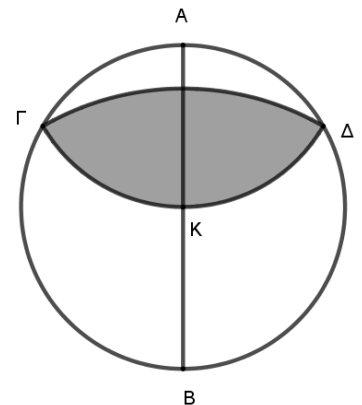
13. Στο διπλανό σχήμα το εμβαδόν του κύκλου είναι $16\pi\text{cm}^2$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και το τόξο \widehat{ZE} δημιουργήθηκε με κέντρο το B και εφάπτεται της $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Να υπολογίσετε:

- (α) Το **εμβαδόν** του σκιασμένου χωρίου.
- (β) Την **περίμετρο** του σκιασμένου χωρίου.



14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και AB διάμετρος του. Με κέντρο το A και ακτίνα AK γράφουμε τόξο $\Gamma K\Delta$ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ . Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα $B\Gamma$ γράφουμε τόξο $\Gamma\Delta$ μέσα στον κύκλο.

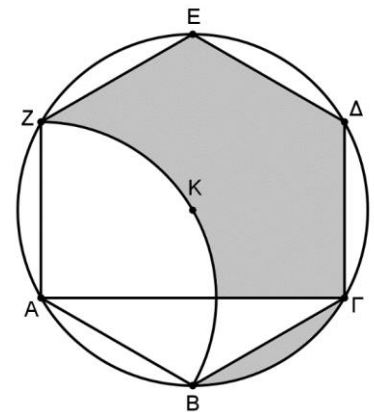
- (α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = R\sqrt{3}$.
- (β) Να υπολογίσετε το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** της σκιασμένης επιφάνειας συναρτήσει του R .



15. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) .

Με κέντρο το A και ακτίνα AB γράφουμε τόξο BKZ .
 Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R :

- (α) το **εμβαδόν** του τριγώνου $AB\Gamma$,
- (β) το **εμβαδόν** του σκιασμένου χωρίου.



ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

1. Να βρείτε τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^6 - 3x^2 + \frac{3}{x^4} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

(β) $f(x) = \frac{2-3x}{x^2-4}$

(γ) $f(x) = \eta\mu^4 5x$

(δ) $f(x) = e^{3x} \tau\epsilon\mu 7x$

(ε) $f(x) = \log_4(x^4 + 1) + 5^{3x} + e^e$

(στ) $f(x) = e^{x^2\sigma\phi^3 2x}$

(ζ) $f(x) = \ln(\sqrt{2x^2 - 3^{2x}})$

(η) $f(x) = 6x^2 \cdot 2^{\eta\mu 3x} \cdot \sigma\tau\epsilon\mu(3x^5)$

(θ) $f(x) = \frac{x \ln 5x}{e^x + 1}$

(ι) $x^2 y + \sigma\upsilon\nu y = \ln 7$

(κ) $f(x) = x^{\epsilon\phi x}$

(λ) $f(x) = (x^3 + 2)^{\sigma\phi x}$

2. Με χρήση του ορισμού της παραγώγου, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης με τύπο:

(α) $f(x) = 2x^2 - 1$

(β) $f(x) = \frac{2}{x-3}, x \neq 3$

(γ) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} να βρείτε τις παραγώγους:

(α) $y = f(\epsilon\phi(\ln x))$

(β) $y = f^{(v)}(f(5x)), v \in \mathbb{N}, v \geq 2.$

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας σε όλα τα πιο κάτω:

(α) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η

συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη,

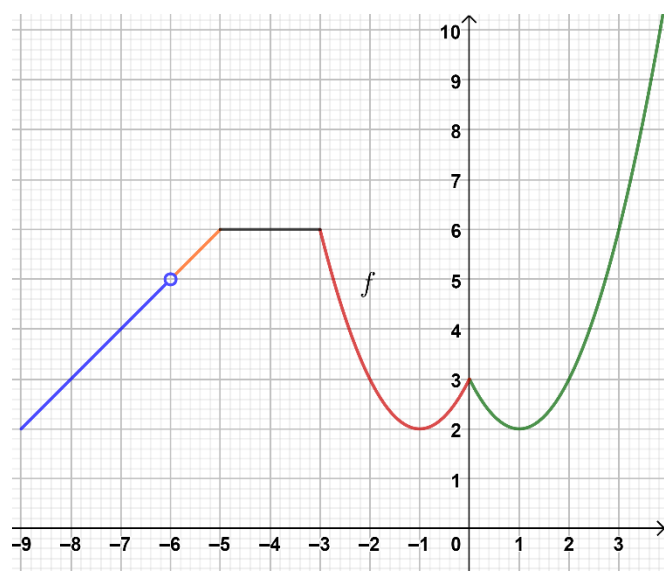
(β) να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο:

(i) $x = -7,$

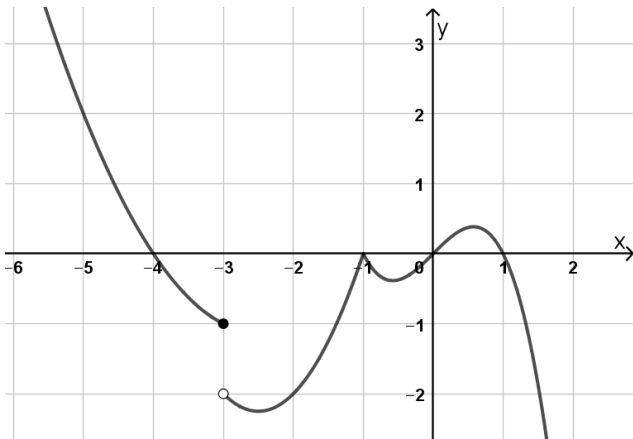
(ii) $x = -4,$

(γ) για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη,

(δ) να βρείτε το πλήθος των τιμών της μεταβλητής $x \in [-2, 3],$ όπου $f'(x) = 0$



5. Με βάση την πιο κάτω γραφική παράσταση της $y = f(x)$, να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



(α) Το σημείο στο οποίο η συνάρτηση είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη είναι το:

- A. $(-3, -1)$ B. $(0,0)$ Γ. $(-1,0)$

(β) Για κάθε $x \in (-\infty, -3)$ η τιμή της παραγώγου είναι:

- A. μηδέν B. θετική Γ. αρνητική

(γ) Το πλήθος των σημείων για τα οποία η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη είναι:

- A. ένα B. δύο Γ. τρία

(δ) Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f'(x) = 0$ είναι συνολικά:

- A. τρεις B. τέσσερις Γ. δύο

(ε) Η κλίση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη του $x = 0$ είναι:

- A. θετική B. αρνητική Γ. μηδέν

6. Αν $y = \eta\mu(e^x - 1)$ να δείξετε ότι: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + ye^{2x} = 0$.

7. Αν $y = x^2 \ln x$ να λύσετε την εξίσωση: $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

8. Δίνεται η καμπύλη: $4x^2 + y^2 + 2xy = 21$, $y > 0$ που περνά από το σημείο A , με $x = -2$. Η εφαπτομένη της καμπύλης στο A είναι παράλληλη με την ευθεία $x + ay = 3$. Να βρείτε την τιμή του a .

9. Αν $x^2 + y^2 - 2x + y = 5$ να δείξετε ότι:

(α) $\frac{dy}{dx} = \frac{2-2x}{2y+1}$

(β) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-50}{(2y+1)^3}$

10. Δίνεται η εξίσωση: $y^2 - x \cdot y = 6$.

(α) Να δείξετε ότι: $(2y - x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2 \frac{dy}{dx} = 0$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο $x = 5$ και $y < 0$.

11. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^2 - x \cdot y + y^2 = 27$. Να βρείτε:

(α) τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια.

(β) τις εξισώσεις των οριζόντιων αυτών εφαπτομένων.

(γ) τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία είναι κατακόρυφη εφαπτομένη.

(δ) τις εξισώσεις των κατακόρυφων αυτών εφαπτομένων.

12. Δίνεται η συνάρτηση $\ln y = x \ln 2 + \ln x$.

(α) Να δείξετε ότι: $y' = \frac{y}{x} + y \cdot \ln 2$

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $y' - y \cdot \ln 2 + 12 = 4^x$ μετασχηματίζεται στη μορφή $4^x - 2^x - 12 = 0$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση.

13. Αν $x \cdot e^y - 3 = x$, να δείξετε ότι:

(α) $y = \ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$

(β) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{x(x+3)}$

(γ) $x^4 \cdot e^{2y} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x^2 \cdot e^y \cdot (2x + 3) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \sin x)$.

(α) Να δείξετε ότι: $f'(x) = \sigma\varphi \frac{x}{2}$.

(β) Να δείξετε ότι $f''(x) + e^{-f(x)} = 0$.

15. Δίνεται η καμπύλη $y = (x + \sqrt{x^2 + 4})^k$

(α) Να δείξετε:

(i) $\frac{dy}{dx} = \frac{\kappa y}{\sqrt{x^2 + 4}}$

(ii) $(x^2 + 4) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - \kappa^2 y = 0$

(β) Για $\kappa = 2$, η εφαπτόμενη και η κάθετη της καμπύλης στο σημείο της $A(0,4)$ τέμνουν τον άξονα των τετμημένων στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

16. Αν $\ln(\sigma\eta\nu y) = x + \ln x$ να δείξετε ότι :

$$(\alpha) -\eta\mu y \frac{dy}{dx} = (x + 1) \cdot e^x$$

$$(\beta) x \cdot (x + 1) \cdot e^{2x} \cdot \frac{dy}{dx} - \eta\mu^2 y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = (x + 2) \cdot e^x \cdot \eta\mu y.$$

17. Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = 2t^2 - 3t \\ y = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της $\frac{dy}{dx}$ για $t = 2$.

(β) Να υπολογίσετε την $\frac{d^2y}{dx^2}$.

18. Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = 3\sigma\eta\nu\theta - 1 \\ y = 2 + \eta\mu\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $9(y - 2) \frac{d^2y}{dx^2} + 9 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$.

19. Παραμετρική καμπύλη (c) ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \sigma\eta\nu 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

(α) Να δείξετε ότι:

$$(i) \frac{d^2y}{dx^2} = -2e^{2t}(2\sigma\eta\nu 2t + \eta\mu 2t).$$

(ii) η εξίσωση $-2e^{2t}(2\sigma\eta\nu 2t + \eta\mu 2t) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right)$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο όπου $t = 0$.

20. Αν η ευθεία $y = 4x - 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο $A(1, f(1))$, να βρείτε:

(α) τις τιμές των $f(1)$ και $f'(1)$

(β) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = f(5 - x^2) + x, x \in \mathbb{R} \text{ στο σημείο } B(2, g(2)).$$

21. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 3x & x \leq 1 \\ -x^2 + \beta x & x > 1 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β .

22. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 5, & x < 1 \\ (\beta + 2)\sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση

$$g(e^{2x}) = \ln 3x, \quad x > 0.$$

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

(β) Αν $a = -2$ και $\beta = 6$, να δείξετε ότι: $f'(9) + \frac{16 \ln 2}{3} \cdot g'(4) = 2, x > 0$

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

23. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10 \text{ cm}^2/\text{sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος της σφαίρας, όταν η ακτίνα είναι 85 cm . ($E_{\text{σφαίρας}} = 4\pi R^2, V_{\text{σφαίρας}} = \frac{4\pi R^3}{3}$).

24. Οι κάθετες πλευρές ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου μεγαλώνουν με ρυθμό $2 \text{ cm}/\text{min}$.

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ως προς το χρόνο, όταν η υποτείνουσα του είναι $5\sqrt{2} \text{ cm}$.

25. Ο όγκος ενός κύβου πλευράς α αυξάνεται με ρυθμό $2 \text{ cm}^3/\text{min}$. Να γραφούν οι σχέσεις που δίνουν την επιφάνεια E και τον ογκο V του κύβου ως συνάρτηση της πλευράς του α και να βρεθούν:

(α) Ο ρυθμός μεταβολής της πλευράς του κύβου ως προς το χρόνο.

(β) Ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας του κύβου ως προς το χρόνο.

(γ) Ο ρυθμός μεταβολής με τον οποίο μεταβάλλεται η επιφάνεια του κύβου, όταν ο όγκος είναι 8 cm^3 .

$$(\text{Δίνεται: } E_{\text{κύβου}} = 6\alpha^2, V_{\text{κύβου}} = \alpha^3)$$

26. (α) Με τη χρήση του θεωρήματος της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης,

$$\text{να αποδείξετε ότι: } (\log_2 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 2}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

(β) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f^{-1}(x)$ η οποία αντιστρέφεται. Αν η κάθετη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο της με τετμημένη 4 έχει εξίσωση $x + 3y = 10$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τεταγμένη 4.

- 27.** (α) Με τη χρήση του θεωρήματος της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης, να αποδείξετε ότι: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- (β) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$, η οποία αντιστρέφεται. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$ και η εφαπτομένη της f στο σημείο A σχηματίζει με τον άξονα των xx' προσανατολισμένη γωνία $\frac{\pi}{6}$, να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης f^{-1} στο σημείο B με $x_0 = 3$.
- 28.** Αν για τη συνάρτηση $f(x)$ ισχύει $e^{x^2-f(x)} = x^{f(x)+1}, x > \frac{1}{e}$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ και την παράγωγό της.
- 29.** Δίνεται η συνάρτηση $g(x)$ για την οποία ισχύει ότι $g(x) = e^{f(x^2)}, f'(x) \neq 0$.
Να δείξετε ότι: $\frac{g'(1)}{f'(1)} = 2g(1)$.
- 30.** Για τις συνάρτησεις f και g , οι οποίες είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} ισχύει ότι:
 $3f^2(x) + g^3(x) = 11, \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = -1$ και $f'(1) = 4$.
(α) Να βρείτε την τιμή του $g(1)$.
(β) Να αποδείξετε ότι $g'(1) = 2$ και να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της συνάρτησης g στο σημείο της $(1, g(1))$.
(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της αντίστροφης της συνάρτησης f για $x = -1$.
- 31.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - f(2x)$ για την οποία ισχύουν $g'(1) = 5$ και $g'(2) = 7$. Θεωρούμε, επιπλέον, τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - f(4x)$. Να αποδείξετε ότι $h'(1) = 19$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 12: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

- 1.** Δυο όμιλοι επιχειρήσεων, που ο καθένας αποτελείται από 5 επιχειρήσεις, είχαν ετήσιες δαπάνες για το οικονομικό έτος 2022 τα ποσά, σε χιλιάδες ευρώ, που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

Όμιλος Α	200	250	300	300	350
Όμιλος Β	5000	5050	5100	5100	5150

- (α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των δαπανών για κάθε όμιλο.
(β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας για τους δυο ομίλους επιχειρήσεων, ποιός από τους δύο ομίλους παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια;

2. Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών x και y με βάση τις παρακάτω τιμές:

x	10	13	17	21	25	28	30
y	21	24	29	25	36	33	40

3. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας:

x_i	y_i	$x_i y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	3			
2	6			
5	1			
6	2			
8	8			
9	13			

- (α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης των δύο μεταβλητών x_i και y_i .
 (β) Να χαρακτηρίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή συσχέτισης των δύο μεταβλητών x_i και y_i .
4. Δίνονται οι μεταβλητές x, y . Με βάση τις ετήσιες μετρήσεις έντεκα χρόνων υπολογίστηκαν οι τυπικές τους αποκλίσεις $s_x = 36,3$, $s_y = 18,27$, οι μέσοι όροι $\bar{x} = 34$, $\bar{y} = 18,27$ και το άθροισμα των γινομένων τους $\Sigma xy = 1444,24$.
 (α) Να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης (r) μεταξύ των μεταβλητών x και y .
 (β) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών.
5. Τα παρακάτω δεδομένα παριστάνουν τους δείκτες ευφυΐας (I.Q.) 10 μητέρων (x) και των θυγατέρων τους (y):

I.Q. μητέρας	I.Q. θυγατέρας
85	90
90	100
95	90
100	105
110	120
115	110
130	130
120	125
135	120

- (α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.
 (β) Να εκτιμήσετε τον συντελεστή συσχέτισης από το διάγραμμα διασποράς.
 (γ) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή συσχέτισης.

6. Επτά σπίτια σε μία γειτονιά στην περιοχή Αγίου Ανδρέα στη Λευκωσία, ρωτήθηκαν πόσα δέντρα έχουν στην αυλή τους και πόσα λίτρα νερού καταναλώνουν καθημερινά για να τα ποτίζουν. Οι απαντήσεις συνοψίζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

	Αριθμός δέντρων (x)	Λίτρα νερού (y)			
Κατοικία 1	5	24			
Κατοικία 2	7	27			
Κατοικία 3	6	26			
Κατοικία 4	9	35			
Κατοικία 5	7	30			
Κατοικία 6	5	28			
Κατοικία 7	10	40			

- (α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.
(β) Να υπολογίσετε το γραμμικό συντελεστή συσχέτισης r .
(γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023-2024

Β' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22 Μαΐου 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
(Α' ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
ΚΑΙ ΣΥΝΟΔΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΙΑΣ (1) ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
4. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα κλπ.
5. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
6. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
7. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

**ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.**

A1 Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 5x + 3}{2x^3 - x^2}$

A2 Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\eta\mu 4x = 4\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x (\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x)$$

A3 Να βρείτε την ορθή απάντηση στα πιο κάτω ερωτήματα. Υπάρχει μόνο μία ορθή απάντηση σε κάθε ερώτημα.

(α) Αν $\log x = 3$, τότε:

- i) $x = 100$ ii) $x = 1000$ iii) $x = e^3$ iv) $x = 3$

(β) Αν $|x - 1| < 2$, τότε:

- i) $x = 3$ ii) $x < -1$ iii) $-1 < x < 3$ iv) $x > 3$

(γ) Αν $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f + g$ είναι το:

- i) \mathbb{R} ii) $\mathbb{R} - \{1\}$ iii) $\mathbb{R} - \{0\}$ iv) $\mathbb{R} - \{-1\}$

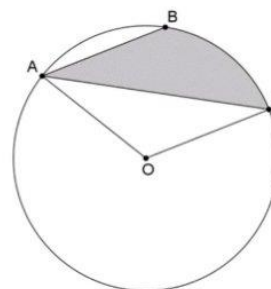
(δ) Η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ της καμπύλης με εξίσωση $\eta\mu x = e^y, x \in (0, \pi)$ είναι:

- i) $\frac{dy}{dx} = \sigma\upsilon\nu x$ ii) $\frac{dy}{dx} = -\sigma\phi x$ iii) $\frac{dy}{dx} = -\sigma\upsilon\nu x$ iv) $\frac{dy}{dx} = \sigma\phi x$

A4 Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $\widehat{AB} = \widehat{BG} = 60^\circ$ και τις χορδές AB και AG , όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

(α) Να δείξετε ότι $AG = \lambda_3$. **(3 μονάδες)**

(β) Να βρείτε, συναρτήσει του R , την περίμετρο της σκιασμένης περιοχής. **(7 μονάδες)**



A5 Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{3x-2}{x}, \quad x > 0$$

όπου A το πεδίο ορισμού της.

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα $(1-1)$. **(3 μονάδες)**
(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . **(4 μονάδες)**
(γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} . **(3 μονάδες)**

A6 Δίνεται η συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -1 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 + \lambda x - 1}{x + 1}, & x > 1 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

- (α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 4$. **(3 μονάδες)**
(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. **(7 μονάδες)**

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α'

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β'

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.

Η άσκηση B1 βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες και οι ασκήσεις B2 και B3 με δεκαπέντε (15) μονάδες η κάθε μία.

B1 (α) Δίνεται αριθμητική πρόοδος η οποία έχει δεύτερο όρο $a_2 = \log 3$ και τρίτο όρο $a_3 = \log 27$.

i) Να αποδείξετε ότι:

$$a_1 = -\log 3 \text{ και } \delta = 2\log 3$$

όπου a_1 ο πρώτος όρος και δ η διαφορά της αριθμητικής προόδου.

(4 μονάδες)

ii) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με

$$\Sigma_{20} = 360 \log 3$$

(2 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί e^{-2x} , $e^x - 1$, e^{2x} να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(4 μονάδες)

B2 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(1, f(1))$ είναι:

$$y = x - 1 + \ln 2$$

(5 μονάδες)

(β) i) Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος $\frac{d^2y}{dx^2}$ της συνάρτησης $y = \ln(x^2 + 1)$ είναι:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

(5 μονάδες)

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$e^{2y} \frac{d^2y}{dx^2} + xe^y \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

(5 μονάδες)

B3 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow [0, +\infty)$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ και } g(x) = \sqrt{x-2}$$

(α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . **(2 μονάδες)**

(β) Να δείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $h: A' \rightarrow \mathbb{R}$, $A' \subseteq \mathbb{R}$ όπου $h(x) = (g \circ f)(x)$ και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της. **(7 μονάδες)**

(γ) Δίνεται η συνάρτηση $k: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ με τύπο:

$$k(x) = \frac{3-x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$$

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις k και h είναι ίσες. Στην περίπτωση που ισχύει $k \neq h$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} για το οποίο είναι $k = h$. **(6 μονάδες)**

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ
ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΝΙΑΙΑ ΤΕΛΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 2023 – 2024

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Διάρκεια: 90 λεπτά

Το δοκίμιο αποτελείται από τέσσερεις (4) σελίδες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
 Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.**

A1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: (2020 – 2021)

$$f(x) = 5x^4 - \sin 2x + \ln x, \quad x > 0$$

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .

A2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια: (2022 – 2023 Α' Τετρ.)

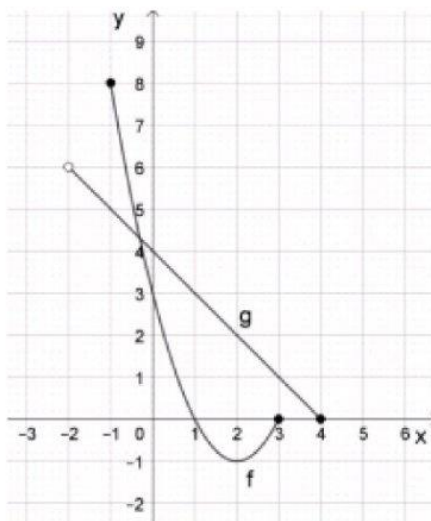
α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 4x}{x + 2}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 + 5x}{3x^2 - 4}$

A3. α) Να διατυπώσετε τον ορισμό της άρτιας συνάρτησης. (2021 – 2022 Α' Τετρ.)
(2 μον.)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ είναι άρτια. (8 μον.)

- A4.** Στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f: A \rightarrow f(A)$ και $g: B \rightarrow g(B)$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $x = 2$. (2020 – 2021)



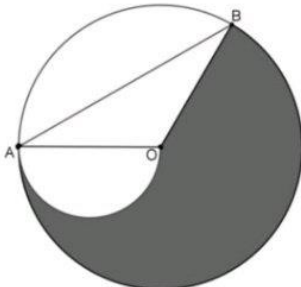
Με τη βοήθεια των πιο πάνω γραφικών παραστάσεων να υπολογίσετε τις πιο κάτω τιμές:

- α) $(f - g)(2)$
 - β) $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$
 - γ) $e^{g(4)}$
 - δ) $f'(2)$
 - ε) $g^{-1}(3)$
- A5.** α) Να δείξετε ότι: (2022 – 2023 Α' Τετρ.)

$$\sin 2x + 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin^2 x + \sin x \quad (3 \text{ μον.})$$
- β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο να λύσετε την εξίσωση

$$\sin 2x + 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \quad (7 \text{ μον.})$$

- A6.** Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) με χορδή $AB = \lambda_3$ και ημικύκλιο με διάμετρο AO . Αν $AO = 12 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου σκιασμένου χωρίου. (2020 – 2021)



ΜΕΡΟΣ Β: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Οι ασκήσεις B2 και B3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία ενώ η άσκηση B1 βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

- B1.** α) Να λύσετε την εξίσωση (2021 – 2022 Β' Τετρ.)

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1) \quad (6 \text{ μον.})$$

- β) Αν το ρ είναι η μεγαλύτερη από τις λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης, να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = \log_2 \rho + \log_4 \rho + \log_{16} \rho + \log_{256} \rho + \dots \quad (4 \text{ μον.})$$

- B2.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: (2022 – 2023 Β' Τετρ.)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 1 \\ \sqrt{x} + \beta, & x > 1 \end{cases}$$

- α) Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. (8 μον.)

- β) Αν $a = \frac{1}{4}$ και $\beta = -\frac{3}{4}$, να βρείτε:

- i) Την παράγωγο συνάρτηση, $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (3 μον.)
ii) Την εξίσωση της κάθετης ευθείας, της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. (4 μον.)

B3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με τύπους: (2020 – 2021)

$$f(x) = \ln(x - 2) \text{ και } g(x) = \ln(x + 2)$$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f^{-1} της f . (6 μον.)
- β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f^{-1} και στη συνέχεια τη συνάρτηση f στο ίδιο σύστημα αξόνων σημειώνοντας τα σημεία τομής της κάθε γραφικής παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. (3 μον.)
- γ) Να ορίσετε την συνάρτηση $f + g$ (τύπος και πεδίο ορισμού) (3 μον.)
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $(f + g)(x) = 0$ (3 μον.)

Στο Δειγματικό Δοκίμιο περιλαμβάνονται ερωτήσεις/ασκήσεις απ' όλη την Διδακτέα ύλη όπως έχει καθοριστεί στα Πλαίσια Μάθησης. Η Εξεταστέα ύλη θα ανακοινωθεί σε μεταγενέστερο στάδιο.

ΤΕΛΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024 - 2025

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 12 Μαΐου 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 ΛΕΠΤΑ

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΚΑΙ ΣΥΝΟΔΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΙΑΣ (1) ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε όλα τα θέματα** στο εξεταστικό δοκίμιο.
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας **το όνομά σας**.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο για σχήματα, διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

A1 Να βρείτε την παράγωγο της πιο κάτω συνάρτησης:

$$f(x) = \varepsilon\varphi x + \ln x + \frac{x^3}{6} - 6x + 8, \quad x \in \mathbb{R}^+ - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

A2 Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

α) $\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\eta\mu\alpha \eta\mu\beta} = \sigma\varphi\alpha \sigma\varphi\beta - 1$

β) $\frac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha + 1} = \varepsilon\varphi\alpha$

A3 Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α) $\log_3(x+2) - \log_3 x = 2$

β) $36^x - 7 \cdot 6^x = 30$

A4 α) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = 4 - |x| + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια, περιττή ή τίποτα από τα δύο.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x+4} - 2} \right)$$

A5 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B, \Gamma \subseteq \mathbb{R}$, με τύπους:

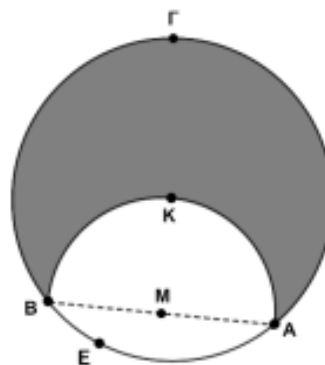
$$f(x) = \frac{3x}{x-3}, \quad g(x) = \frac{3x|x+3|}{x^2-9}, \quad h(x) = \frac{x-3}{6x}$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f , g , h . **(Μονάδες 2)**
- β) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} , ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες. **(Μονάδες 4)**
- γ) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \cdot h$ και να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση. **(Μονάδες 4)**

A6 Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και $AB = \lambda_4$ μια χορδή του. Με κέντρο το μέσο M της χορδής AB , γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου AB εντός του κύκλου (K, R) .

α) i) Να αποδείξετε ότι:

$$MK = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$



(Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μηνίσκου $BKAGB$, δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{R^2(\pi + 1)}{2}$$

(Μονάδες 6)

- β) Η ακτίνα του κύκλου (K, R) αυξάνεται με ρυθμό 5 cm/min. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του μηνίσκου $BKAGB$ ως προς τον χρόνο, όταν η ακτίνα του κύκλου (K, R) είναι 10 cm. **(Μονάδες 2)**

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α'
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β'

ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
 Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες, ενώ οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.
 Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

B1 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπους:

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x$$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. **(Μονάδες 2,5)**
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . **(Μονάδες 2,5)**
- γ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της. **(Μονάδες 2)**
- δ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$. Σε περίπτωση που ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της. **(Μονάδες 3)**

B2 α) Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \sin 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

i) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\eta\mu 2t}{e^{2t}}$ **(Μονάδες 3)**

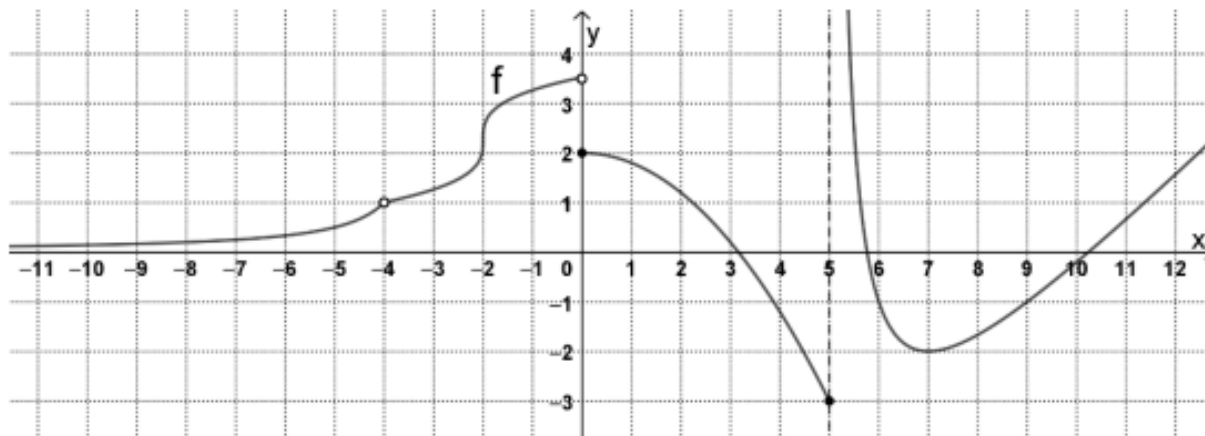
ii) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ **(Μονάδες 4)**

β) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f^3(3x^3 + x) + f(4x) = f(x) + 5x + 8, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- i) Να δείξετε ότι $f(0) = 2$. **(Μονάδες 2)**
- ii) Να δείξετε ότι $f'(0) = \frac{1}{3}$. **(Μονάδες 4)**
- iii) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με $x_0 = 0$. **(Μονάδες 2)**

B3 Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f :



α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

v) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση f ισχύει το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[8,12]$. **(Μονάδες 3)**

γ) Να χαρακτηρίσετε με ΟΡΘΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς:

i)	Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R} - \{-4, 5\}$.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
ii)	Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
iii)	Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,5]$.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
iv)	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται κατακόρυφη εφαπτόμενη στο $x_0 = -2$.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ

(Μονάδες 4)

δ) Η ευθεία $y = -2$ είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(7, -2)$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x) + 2}{x^2 - 6x - 7}$$

(Μονάδες 2)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ