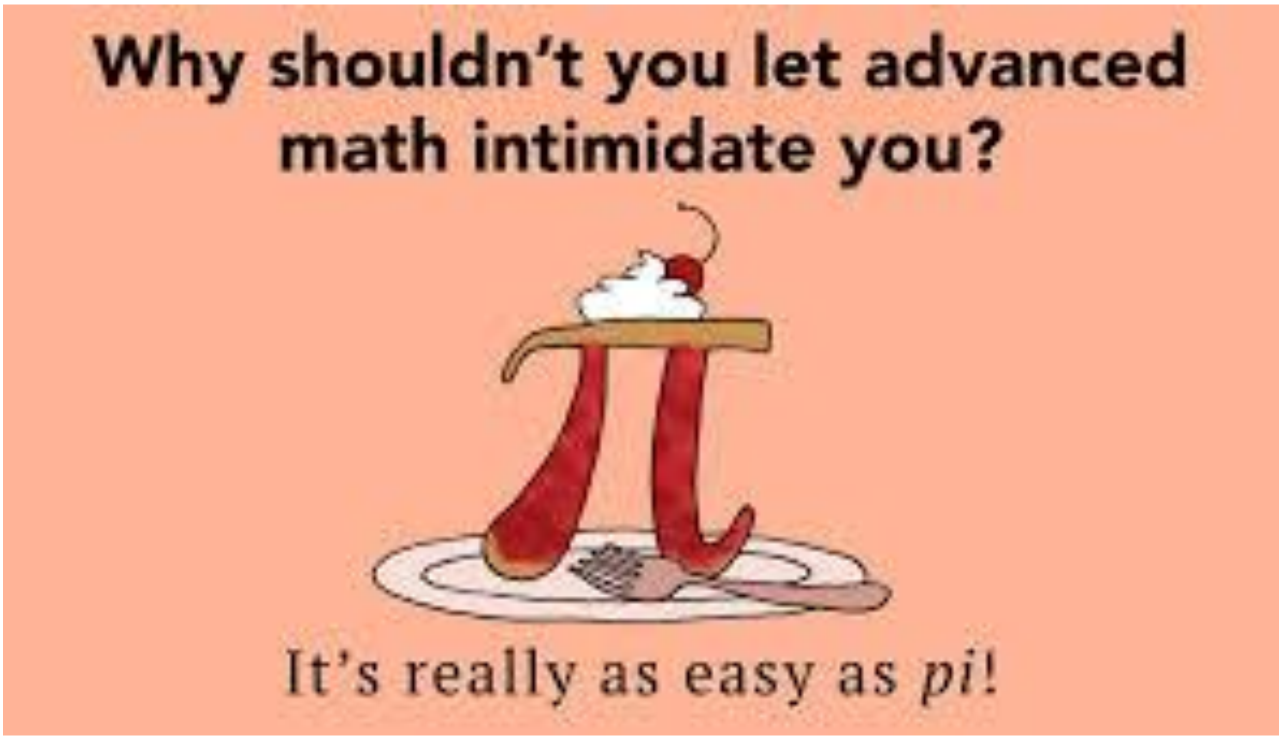
ΛΥΚΕΙΟ ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ ΜΑΚΑΡΙΟΥ Γ΄ - ΔΑΣΟΥΠΟΛΗ
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2025 – 2026



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
2025-2026

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

- Επαναληπτικές ασκήσεις
- Ενιαία Τελική Γραπτή Εξέταση 2024
- Ενιαία Τελική Γραπτή Εξέταση 2025
- Δειγματική Ενιαία Τελική Γραπτή Εξέταση 2025

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Να διατυπώσετε τον ορισμό της νιοστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού.

2. Να αποδείξετε την ιδιότητα: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=\alpha$, για $\alpha \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$

3. Να αποδείξετε ότι αν α, β ομόσημοι, τότε: $\alpha \leq \beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\beta}$

4. Να απαντήσετε σωστό η λάθος στις πιο κάτω προτάσεις:

Α/Α	Πρόταση ή σχέση	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
1	$\sqrt[4]{\left(3-\sqrt{10}\right)^4}=3-\sqrt{10}$		
2	Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha \cdot \beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$		
3	$\left(\sqrt[5]{9^2}\right)^3=9\sqrt[5]{9}$		
4	Ο αντίστροφος του $\sqrt{2}-1$ είναι ο $\sqrt{2}+1$		
5	$\sqrt[3]{0{,}8}>\sqrt[5]{0{,}8}$		
6	Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha=\sqrt[3]{10}$, $\beta=\sqrt{5}$, $\gamma=\sqrt[6]{80}$ ισχύει $\beta<\gamma<\alpha$		

5. Να κάνετε τις πράξεις και να δώσετε την απάντηση σας στην πιο απλή μορφή

(α) $\sqrt{25}+3\sqrt{8}-\sqrt{16}-2\sqrt{32}=$

(β) $\sqrt[4]{16\alpha^8}-\sqrt[5]{32\alpha^{10}}=$

(γ) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}=$

(δ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{16}=$

(ε) $\sqrt{\sqrt[3]{8^2}}=$

(στ) $(2\sqrt{3}+1)^2=$

(ζ) $\sqrt{16}-\sqrt[4]{81}+32^{\frac{2}{5}}$

(η) $\sqrt[6]{32\beta}\cdot\sqrt[6]{2\beta^5}$, $\beta \geq 0$

θ) $\sqrt[3]{36\alpha^4\sqrt{34\alpha^4+\sqrt{4\alpha^8}}}$, $\alpha \geq 0$

(ι) $\dfrac{27^{\frac{1}{3}}.9^{\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{8}}$

6. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο <,=,>, ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς.

(α) $(1{,}5)^{\frac{3}{4}}\cdots\cdots(1{,}7)^{\frac{3}{4}}$ (β) $(7)^{-\frac{3}{5}}\cdots\cdots(4)^{-\frac{3}{5}}$ (γ) $\sqrt[3]{2^5}\cdots\cdots 2\cdot\sqrt[3]{2^2}$ (δ) $-\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{7}{2}}\cdots\cdots-\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$

7. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{7} - \sqrt{6}$ και $\beta = \sqrt{7} + \sqrt{6}$.
   (α) Να δείξετε ότι α και β είναι αντίστροφοι αριθμοί.
   (β) Να δείξετε ότι $\frac{1}{\beta}$ και $-\alpha$ είναι αντίθετοι.
   (γ) Να δείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 2\sqrt{6}$.

8. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(α) $\frac{3}{\sqrt{33}}$ (β) $\frac{14}{\sqrt[3]{7^2}}$ (γ) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

(α) $x^3 = -64$ (β) $x^4 = 16$ (γ) $x^2 + 4 = 0$

(δ) $\sqrt[3]{x-4} - 3 = 0$ (ε) $(5x-3)^{\frac{3}{5}} = 8$, $x \geq \frac{3}{5}$ (στ) $\sqrt{8+2x} = x$, $x \geq 0$

(ζ) $\chi^4 = 81$ (η) $\sqrt[5]{3\chi - 4} = 2$ (θ) $54\chi^4 + 2\chi = 0$

(ι) $(2\chi - 1)^{\frac{3}{2}} = 27$ (κ) $\sqrt{\chi} + 6 = \chi$ (λ) $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x-2} = 0$

(μ) $x^{\frac{4}{5}} - 9x^{\frac{2}{5}} = 0$ (ν) $\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{5}} = x$

10. Μια υπεραγορά εργάζεται 6 μέρες την εβδομάδα και πωλάει x κιλά αγγουράκια και ψ κιλά ντομάτες κάθε μέρα. Αν για τις ημερήσιες πωλήσεις x και ψ ισχύει:

$$100 < x < 200 \text{ και } 120 < \psi < 150,$$

   (α) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι εβδομαδιαίες πωλήσεις της υπεραγοράς σε ντομάτες και αγγουράκια συνολικά. (Η απάντηση να είναι ανισοτική σχέση).

   (β) Αν το x διπλασιαστεί και το ψ αυξηθεί κατά 20 κιλά, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι νέες εβδομαδιαίες πωλήσεις της υπεραγοράς σε αγγουράκια και ντομάτες συνολικά. (Η απάντηση να είναι ανισοτική σχέση).

11. Αν $1 \leq \chi \leq 3$ και $-4 \leq \psi \leq -2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $\chi + \psi$ (β) $x \cdot y$ (γ) $2x - 3y$ (δ) $\chi\psi + 1$

12. Αν $\chi_1 > \chi_2 > 0$ να συγκρίνετε τις πιο κάτω ποσότητες:

$A = -2\chi_1 + 3$ $B = -2\chi_2 + 3$

$\Gamma = \frac{7}{\sqrt[6]{\chi_1}}$ $\Delta = \frac{7}{\sqrt[6]{\chi_2}}$

13. Αν $\alpha < \beta < 0$, να συγκρίνεται τους αριθμούς: $\sqrt{\alpha\beta + 3}$ και $\sqrt{3 + \beta^2}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Να δώσετε τον ορισμό γωνίας σε κανονική θέση.

2. Να δώσετε τον ορισμό του τριγωνομετρικού κύκλου.

3. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό κύκλο και το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

4. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά των γωνιών:

(α) $750°$ (β) $\frac{13\pi}{7}$ (γ) $-200°$

5. Να γράψετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς ως τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας

(α) $\varepsilon\varphi 113° =$ (β) $\eta\mu(-220°) =$

6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu 130° \sigma\upsilon\nu^2(360° - \alpha) + \eta\mu 50° \eta\mu^2(180° + \alpha)}{\sigma\upsilon\nu 220°}$

7. Αν $\varepsilon\varphi\theta = -\frac{15}{8}$ και $90° < \hat{\theta} < 180°$ να υπολογίσετε με τη χρήση ταυτοτήτων την τιμή της παράστασης $A = \frac{17\sigma\upsilon\nu\theta + 51\eta\mu\theta - 16\tau\varepsilon\mu\theta}{30\sigma\varphi\theta}$.

8. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης Α με τις γραφικές παραστάσεις στη στήλη Β.

9. Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$ στο διάστημα $0° < \omega < 360°$.

10. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες :

(α) $\frac{\sigma\varphi\theta}{1 + \sigma\varphi^2\theta} = \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$

(β) $\frac{\sigma\varphi x}{\sigma\tau\varepsilon\mu x + \sigma\varphi x} - \frac{1}{\tau\varepsilon\mu x - 1} = -2\sigma\varphi^2 x$

(γ) $\frac{(1+\sigma\varphi x)^2}{\sigma\tau\varepsilon\mu x} = \sigma\tau\varepsilon\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x$

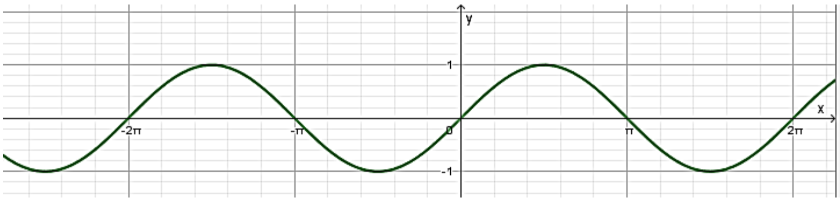
(δ) $\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = 2\sigma\tau\varepsilon\mu x$

(ε) $\frac{\varepsilon\varphi\theta}{1+\varepsilon\varphi^2\theta} = \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

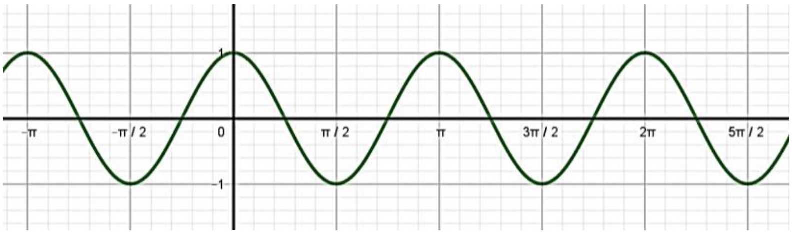
(στ) $\frac{\varepsilon\varphi\theta - \eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\varphi\theta - \eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} = \varepsilon\varphi^4\theta$

11. Να γράψετε δίπλα από κάθε γραφική παράσταση τον τύπο της συνάρτησης και την περίοδο της.

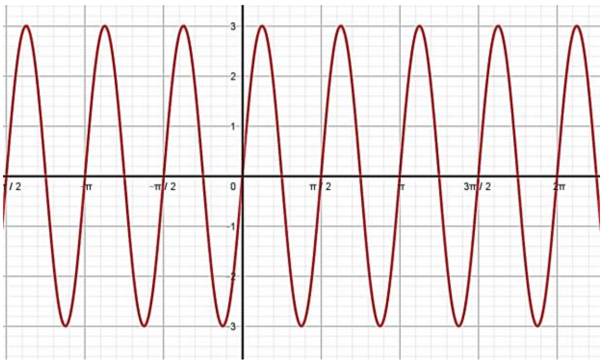
(i)



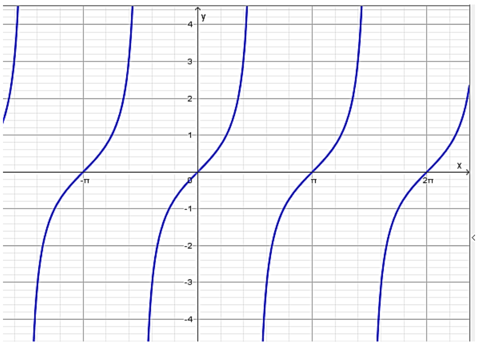
(ii)



(iii)



(iv)

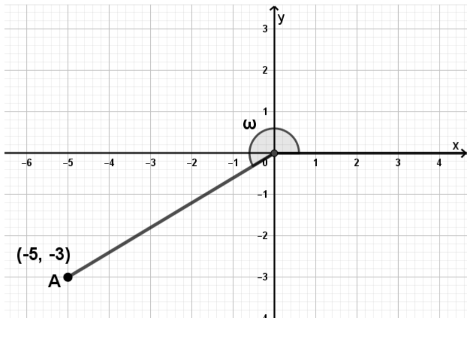


12. Αν $Α$, $Β$, $Γ$ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου $ΑΒΓ$,να δείξετε ότι :

$$συν\frac{Α+Β}{2}στεμ\frac{Γ}{2}-συνπ\ εφ\frac{Γ}{2}σφ\frac{Α+Β}{2}=τεμ^2\frac{Γ}{2}$$

13. Με βάση το διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

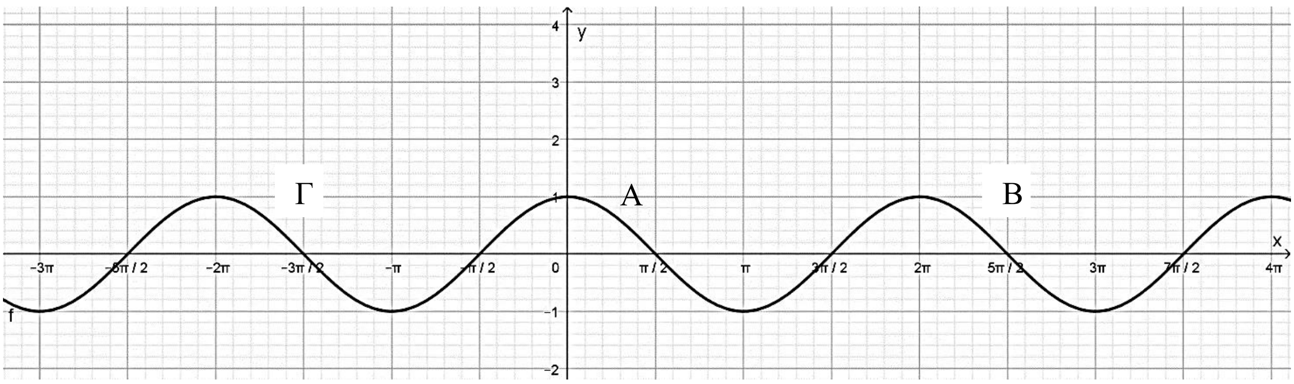
$$Κ=\frac{25εφω-\sqrt{34}\cdot ημ(90^\circ-ω)}{6τεμ(270^\circ+ω)}\ .$$



14. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις , βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) Το σημείο $T\left(\frac{\sqrt{3}}{5},-\frac{\sqrt{22}}{5}\right)$ ανήκει στο τριγωνομετρικό κύκλο.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β) Η γωνία $\alpha=\frac{3\pi}{4}rad$ είναι ίση με 135^0	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ) $\eta\mu^2 x = 1-\sigma\upsilon\nu x^2$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ) Για κάθε $\theta \in R$, ισχύει $0 \leq \sigma\upsilon\nu\theta \leq 1$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ε) Η τελική πλευρά της γωνίας θ για την οποία $\varepsilon\varphi\theta < 0$ και $\tau\varepsilon\mu\theta > 0$, βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(στ) Υπάρχει γωνία $0<\varphi<360$ για την οποία ισχύει $\tau\varepsilon\mu\varphi=\frac{1}{5}$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ζ) Αν τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{8},\alpha\right)$ και $B\left(-\frac{7\pi}{8},\beta\right)$ είναι σημεία της $f(x)=\varepsilon\varphi x$, τότε $\alpha=\beta$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(η) Υπάρχει γωνία θ για την οποία $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$ και $\varepsilon\varphi\theta=\sqrt{3}$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

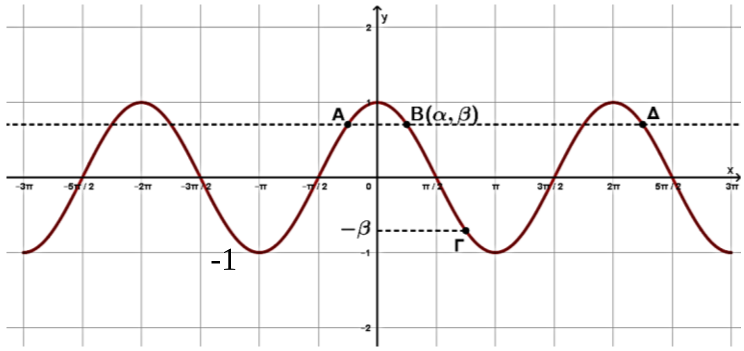
15. Η γραφική παράσταση της $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x \in R$, δίνεται στο πιο κάτω σχήμα



(α) Η συνάρτηση f είναι περιοδική ; Αν ναι να αναφέρετε την περίοδο.

(β) Το σημείο Α έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$. Να γράψετε την τετμημένη των σημείων Β και Γ , αν γνωρίζουμε ότι η τεταγμένη τουςείναι ίση με $\frac{1}{2}$.

16. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της τριγωνομετρικής συνάρτησης $f(x) = συνx,\ x \in \mathbb{R}$ και οι συντεταγμένες του σημείου Β είναι $(α, β)$.



(α) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων Α, Γ και Δ.

(β) Στο ίδιο σχήμα να κάνετε τη γραφική παράσταση της $g(x) = 2συν2x,\ x \in [0, 2π]$.

(γ) Να υπολογίσετε τον τριγωνομετρικό αριθμό $τεμ(π - α)$.

(δ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $K = 2 + 3συνx$, για $x \in [\frac{π}{2}, π]$

17. <u>Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση</u>:

α) η γωνία 72° σε ακτίνια (rad) ισούται με:
i) $\frac{2\pi}{5}$ ii) $\frac{3\pi}{5}$ iii) $\frac{5\pi}{9}$ iv) $\frac{5\pi}{8}$

β) $ημχ.τεμ\left(-\frac{3\pi}{2} + χ\right) =$
i) 1 ii) -1 iii) $-εφx$ iv) $-ημ^2χ$

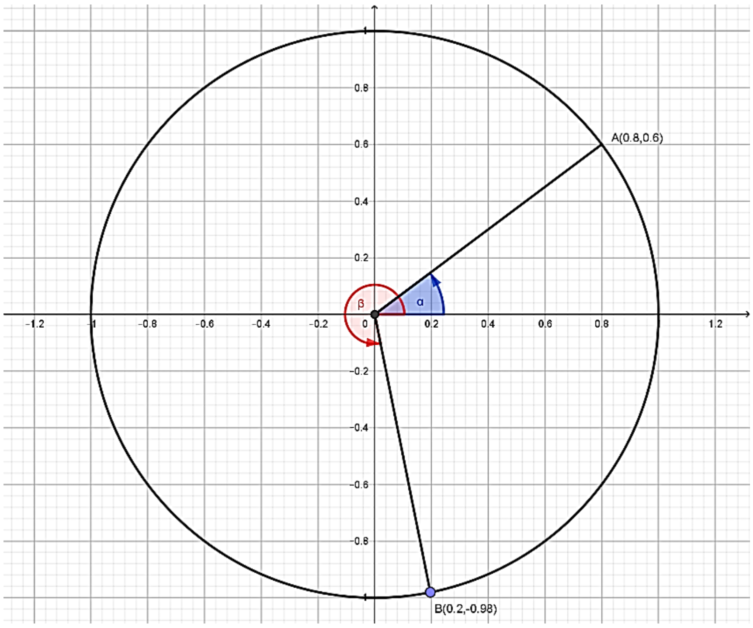
γ) Η τελική πλευρά της γωνίας $\frac{19\pi}{4}\ rad$ βρίσκεται στο:
i) 1ο τεταρτημόριο ii) 2ο τεταρτημόριο iii) 3ο τεταρτημόριο iv) 4ο τεταρτημόριο.

δ) Αν $ημχ + συνχ = \sqrt{3}$ τότε η παράσταση $ημχ \cdot συνχ =$
i) 1 ii) -1 iii) $\frac{1}{3}$ iv) $\frac{2}{3}$.

ε) Αν η τελική πλευρά της γωνίας θ περνά από το σημείο $M(-2,3)$ τότε το $συνθ =$
i) $-\frac{2}{3}$ ii) $\frac{2}{3}$ iii) $-\frac{2}{\sqrt{13}}$ iv) $\frac{3}{\sqrt{13}}$

στ) Ποιο από τα πιο κάτω δεν μπορεί να ισχύσει:
i) $ημω = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ii) $στμεχ = 5$ iii) $ημα = \frac{2}{5}$ και $συνα = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ iv) $εφβ = 3$

18. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο, οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι σε κανονική θέση με τελική πλευρά την ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες των σημείων είναι $A(0.8\,,0.6)$ και $B(0.2,-0.98)$. Χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό κύκλο να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα.



α) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

$\sigma\upsilon\nu\alpha =$

$\eta\mu\beta =$

$\sigma\upsilon\nu(900^\circ + \alpha) =$

β) Να συγκρίνετε τις ποσότητες χρησιμοποιώντας τα σύμβολα $<, =, >$ αιτιολογώντας την απάντηση σας χωρίς τη χρήση υπολογιστικής.

i) $\tau\varepsilon\mu\alpha \dots\dots\dots \tau\varepsilon\mu\beta$ ii) $\varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu\beta \dots\dots \sigma\varphi 270^\circ$

γ) Αφού φέρεται τον άξονα των εφαπτόμενων και συνεφαπτομένων να βρείτε το πρόσημο της $\varepsilon\varphi\alpha$ και την τιμή της $\sigma\varphi\beta$, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής.

19. (α) Να δώσετε τον ορισμό της γωνίας σε κανονική θέση.
(β) Η γωνία θ είναι σε κανονική θέση και τέμνει **τον τριγωνομετρικό κύκλο** στο σημείο $\mathrm{A}(\kappa,\lambda)$, όπου $\kappa, \lambda \neq 0$. Να βρείτε:
(i) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta$ και $\varepsilon\varphi\theta$,
(ii) τις συντεταγμένες του σημείου Β στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας $(180^\circ - \theta)$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο,
(iii) την παράσταση $\varepsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\theta$ συναρτήσει των κ και λ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΚΥΚΛΟΣ

1.Να βρείτε τη θέση των δύο κύκλων (Κ, 7 m) και (Λ, 13 m) με βάση τη διάκεντρο ΚΛ στις πιο κάτω περιπτώσεις: α) ΚΛ = 21 m β) ΚΛ = 6 m

2.Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να είναι αληθείς οι πιο κάτω προτάσεις:

α) Κάθε εγγεγραμμένη γωνιά ισούται με το …………….. της αντίστοιχης επίκεντρής της.

β) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του κύκλου Α, Β ονομάζεται …………….

γ) Η …………………… γωνιά έχει την κορυφή της στο κέντρο του κύκλου.

δ) Αν δύο κύκλοι έχουν δύο σημεία τομής τότε ……………….

ε) Τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδών είναι …………….

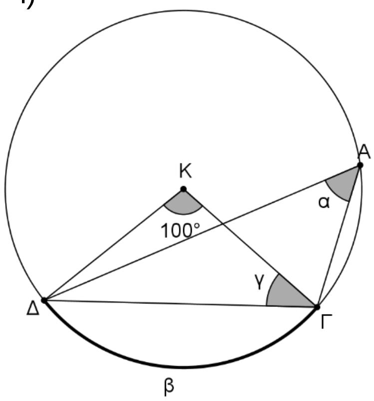
3. Δίνονται οι κύκλοι (Κ, 3x+4 cm) και (Λ, 10+x cm), με διάκεντρο ΚΛ=34cm. Να βρείτε την τιμή ή τις τιμές του x, ώστε οι κύκλοι να:

α) εφάπτονται εξωτερικά, β) εφάπτονται εσωτερικά,

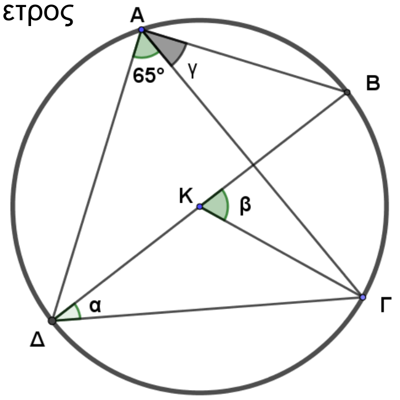
γ) είναι ξένοι εσωτερικά και δ) να τέμνονται.

4.Να υπολογίσετε τις τιμές των **α, β, γ** και **δ** <u>δικαιολογώντας</u> πλήρως τις απαντήσεις σας.

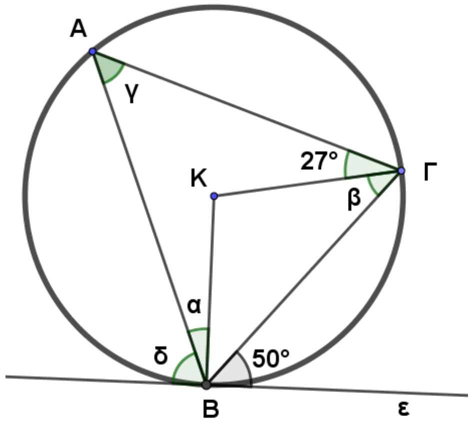
i)



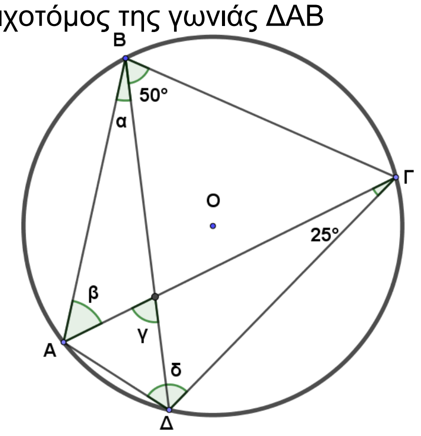
ii) ΔΒ διάμετρος



iii) Βε εφαπτομένη



iv) ΑΓ διχοτόμος της γωνιάς ΔΑΒ



5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές.

6. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και τόξα $AB = 3\chi + 20^{\circ}, B\Gamma = 4\chi - 10^{\circ}$ και $A\Gamma = 5\chi - 10^{\circ}$.

(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ και να βρείτε το είδος του τριγώνου.

(β) Αν Δ είναι τυχαίο σημείο του μικρού τόξου ΑΓ, να δείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΓ.

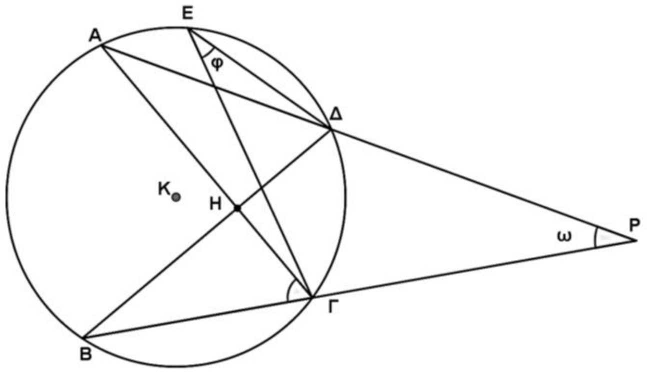
7. Στο διπλανό σχήμα δίνονται

$\text{ΑΒ} = 2 \cdot \text{ΓΔ}$ και $\text{Γ}\hat{\text{Α}}\text{Δ} = 30^\circ$.

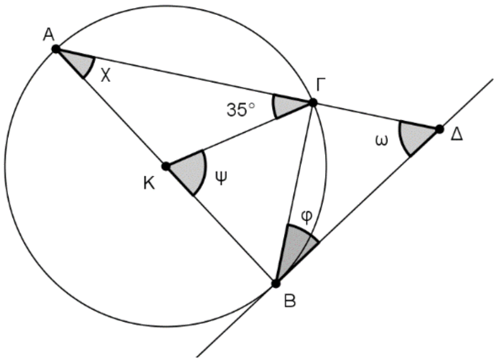
Να δείξετε ότι:

(α) $\text{ΑΓ} \perp \text{ΒΔ}$

(β) $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$



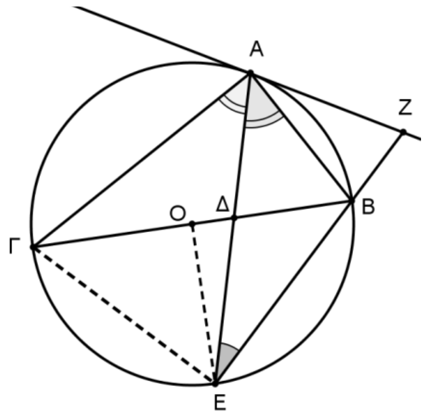
8. Δίνεται κύκλος (Κ,R)με διάμετρο ΑΒ και ΒΔ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β. Αν η $\text{Α}\hat{\Gamma}K = 35°$, να υπολογίσετε:
(α) τις γωνίες χ, ψ, φ και ω
(β) το μέτρο του μικρότερου του ημικυκλίου τόξου ΑΓ.



9. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία AZ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο του Α, η χορδή ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}B$ και η ΓB είναι διάμετρος του κύκλου. Αν η AE τέμνει την ΓB στο σημείο Δ, η BE τέμνει την εφαπτομένη στο σημείο Z και $A\hat{E}B = 30^o$, να υπολογίσετε τις παρακάτω γωνίες δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) $A\hat{\Gamma}B$ (β) $A\hat{\Delta}B$ (γ) $B\hat{A}Z$

(δ) $A\hat{Z}B$ (ε) $E\hat{O}B$



10. Σε κύκλο να φέρετε διάμετρο ΑΒ και να πάρετε τόξο $\text{ΒΓ} = 60^\text{o}$. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Δ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

11. Δίνεται κύκλος (Κ,R) και ΑΒ μια διάμετρος του. Η Αχ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Αν Γ είναι τυχαίο σημείο της Αχ και η ΒΓ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Δ περνά από το μέσο της ΑΓ.

12. Σε κύκλο (Κ, R) φέρουμε τη διάμετρο ΒΓ και τη χορδή ΓΔ ώστε το τόξο $\text{ΒΔ} = 60^\circ$. Στο σημείο Δ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου που τέμνει την προέκταση της διαμέτρου προς το Β στο σημείο Α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Να σημειώσετε δίπλα από κάθε σχέση ορθό ή λάθος

Αν $\lvert\vec{\alpha}\rvert=\lvert\vec{\beta}\rvert$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$	
Τα παράλληλα διανύσματα είναι και ομόρροπα.	
Αν $\vec{\alpha}\neq 0$,τότε το διάνυσμα $-\frac{\vec{\alpha}}{\lvert\vec{\alpha}\rvert}$ έχει μέτρο -1	

2. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ,το Μ είναι μέσο της ΑΒ.
Αν $\overrightarrow{ΑΔ}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{ΔΓ}=\vec{\beta}$, τότε:

α) το διάνυσμα $\overrightarrow{ΔΜ}$ ισούται με :

Α. $\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$ Β. $\frac{\vec{\beta}-\vec{\alpha}}{2}$ Γ. $\vec{\alpha}+\frac{\vec{\beta}}{2}$ Δ. $-\vec{\alpha}+\frac{\vec{\beta}}{2}$ Ε. $\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

β) το διάνυσμα $\overrightarrow{ΜΓ}$ ισούται με :

Α. $\vec{\alpha}+\frac{\vec{\beta}}{2}$ Β. $\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$ Γ. $\frac{1}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ Δ. $\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ Ε. $\vec{\alpha}-\frac{1}{2}\vec{\beta}$

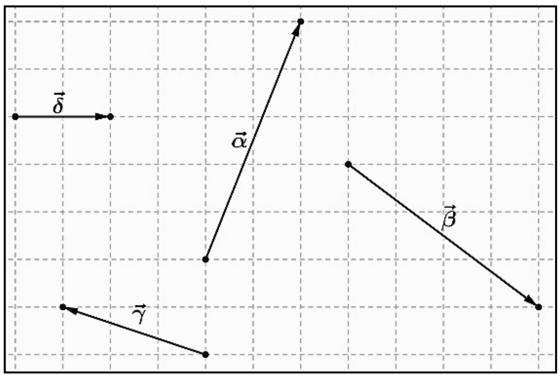
γ) Με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

Α. $\overrightarrow{ΑΒ}$ Β. $\overrightarrow{ΒΔ}$ Γ. $\overrightarrow{ΔΒ}$ Δ. $\overrightarrow{ΓΑ}$ Ε. $\overrightarrow{ΑΓ}$

δ) Με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

Α. $\overrightarrow{ΑΓ}$ Β. $\overrightarrow{ΓΑ}$ Γ. $\overrightarrow{ΒΑ}$ Δ. $\overrightarrow{ΔΒ}$ Ε. $\overrightarrow{ΒΔ}$

3. Στο διπλανό διάγραμμα δίνονται τέσσερα διανύσματα.



(α) Να γράψετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.

(β) Να σχεδιάσετε διάνυσμα:

i. διαδοχικό με το $\vec{\alpha}$ και ίσο με $-\vec{\gamma}$.

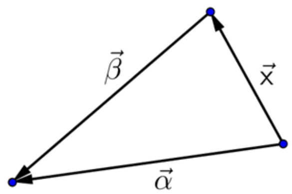
ii. αντίρροπο του $\vec{\delta}$ και με διπλάσιο μέτρο.

(γ) Να σχεδιάσετε διανύσματα $\vec{\varepsilon}$ και $\vec{\zeta}$ με συντεταγμένες $\vec{\varepsilon}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ και $\vec{\zeta}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.

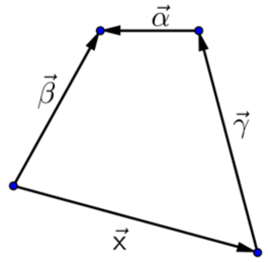
(δ) Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$.

4. Για καθένα από τα πιο κάτω σχήματα, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως άθροισμα ή διαφορά των άλλων διανυσμάτων που δίνονται.

α)



β)



5. Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα και το διάνυσμα $\vec{u}$ έχει διπλάσιο μέτρο από το διάνυσμα $\vec{v}$. Αν $\vec{u}=\begin{pmatrix}2x\\-6\end{pmatrix}$, όπου $x>0$ και $|\vec{u}|=10$, να βρείτε:

(α) την τιμή του x

(β) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

6. Να βρείτε την τιμή του x αν το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}-3\\x-3\end{pmatrix}$ είναι ίσο με 5.

7. Αν P είναι σημείο του ευθυγράμμου τμήματος AB τέτοιο ώστε $(AP)=\frac{2}{7}(AB)$, και O τυχαίο σημείο του επιπέδου με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

8. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ και $\vec{\beta}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα αντίρροπο του διανύσματος $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

9. Οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου ΔΑΓ είναι $\Delta(-2,2)$, $A(-1,-7)$, και $\Gamma(-11,-3)$. Να βρείτε:

α) το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta M}$ όπου Μ μέσο της ΑΓ

β) το διάνυσμα $\overrightarrow{M\Gamma}$ και

γ) το μήκος της διαμέσου ΔΜ.

10. Δίνονται τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, $B(2,-1)$ και $M\left(\alpha,\frac{\alpha-4}{2}\right)$, $\alpha\in R$.

α) Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα, ομόρροπο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β, Μ είναι συνευθειακά. (Με τη χρήση διανυσμάτων).

11. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-1,4), Β(2,3) και Γ(-6,3). Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να υπολογίσετε:

(α) το διάνυσμα $\overrightarrow{BM}$, (β) το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$, (γ) το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$.

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \binom{3}{2}$, $\vec{\beta} = \binom{-2}{5}$.

(α) να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

(β) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

13. Δίνονται A(6,1) , B(-3,2), $\vec{u} = \binom{x}{x+2}$. Αν $\vec{u} // \overrightarrow{AB}$ να υπολογίσετε το x.

14. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \binom{-4}{3}, \vec{\beta} = \binom{1}{5}$ $\kappa\alpha\iota$ $\vec{\gamma} = \binom{2\kappa - 3\mu}{\kappa + 3\mu}$ $\mu\varepsilon$ $\kappa, \mu \in R$. Να υπολογίσετε:

(α) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(β) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(γ) Να βρείτε τις τιμές των κ και μ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ να είναι ίσα.

15. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$. Να βρείτε:

(α) Το μέτρο του $\vec{u}$.

(β) Μοναδιαίο διάνυσμα ομόρροπο με το $\vec{u}$.

(γ) Διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{u}$ με τριπλάσιο μέτρο από το $\vec{u}$.

16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $A(5,-2)$, $B(-1,2)$ και $\Gamma(3,4)$. Να βρείτε:

(α) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(β) Το μήκος της πλευράς ΒΓ.

(γ) Το μέσο Μ της πλευράς ΑΓ.

(δ) Σημείο Δ ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

17. Δίνονται τα σημεία $A(-5,3)$, $B(0,5)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(-2,-3)$.

(α) Να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(β) Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Ρ και Ε είναι συνευθειακά.

18. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ της ΒΓ τέτοιο ώστε $BP = 2 \cdot P\Gamma$. Η προέκταση της ΔΡ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Ζ. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\chi}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\psi}$, να δείξετε ότι:

(α) $\overrightarrow{\Delta P} = \vec{\chi} - \frac{1}{3}\vec{\psi}$

(β) $\overrightarrow{AZ} = 3 \cdot \vec{\chi}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ - ΕΥΘΕΙΑ

1. Να βρείτε την κλίση των ευθειών:

α) $(\varepsilon_1): y = 2x - 3$ β) $(\varepsilon_2): y = 3$ γ) $(\varepsilon_3): x = 4$ δ) $(\varepsilon_4): y = -x + 3$

ε) $(\varepsilon_5): y = \frac{2}{3}x + 3$ στ) $(\varepsilon_5): 2x - 5y = 7$ ζ) $(\varepsilon_5): 4y - 2x = -1$ η) $(\varepsilon_6): y = \frac{x}{5}$

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) διέρχεται από τα σημεία Α(-1,2) και Β(1,1)

(β) διέρχεται από το σημείο Γ(1,-2) και είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων

(γ) διέρχεται από το σημείο Γ(1,-2) και είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων

(δ) διέρχεται από το σημείο Γ(1,-2) και σχηματίζει γωνία 45° με θετικό ημιάξονα των x

(ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη με την ευθείεα $2x - 3y = 2$

(στ) διέρχεται από το σημείο Δ(1,5) και είναι κάθετη στην ευθεία $3x - 2y + 3 = 0$

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\alpha - 4)\chi + \psi = 7$ και $\varepsilon_2 : \chi + (\alpha - 2)\psi = 8$ είναι κάθετες.

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y \\ 2 & -3x \end{vmatrix}$ παριστάνει εξίσωση ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α(1,-7) και Β(4, -4).

5. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(5,2), Β(2,-2), Γ(0,2) είναι ισοσκελές. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΔ και να σχηματίσετε την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ.

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο τομής των ευθειών χ-2ψ=8 και 3χ+ψ=3 και σχηματίζει γωνιά 150^0 με τον άξονα χχ΄.

7. Η ευθεία 2χ-3ψ=6 τέμνει τους άξονες Οχ και Οψ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

8. Αν Α(-1,3) , Β(1,-1) να βρείτε την γωνιά που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με την ευθεία χ+3ψ+1=0.

9. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές τα σημεία Α(2,1) και Β(7,-6) και Γ(3,-2). Να βρείτε:
(α) την εφαπτομένη της γωνιάς Γ του τριγώνου
(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΜ όπου Μ το μέσο της ΒΓ.

10. Αν Α(1,5), Β(-4,1) και Γ(-3,7) είναι τρεις κορυφές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ.

11. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές Α(2,5), Β(3,0) και Γ(-1,2). Να βρείτε:
(α) Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.
(β) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ.
(γ) Την εξίσωση του ύψους ΑΔ και το σημείο Δ.
(δ) Το μήκος του τμήματος ΜΔ.
(ε) Το μήκος του ύψους ΒΕ.
(στ) Τη γωνία Γ.
(ζ) Το εμβαδόν του τριγώνου.

12. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2+\lambda)\chi+(\lambda^2-1)\psi+\lambda+3=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε:
(α) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία.
(β) Για ποια τιμή του λ η ευθεία:
i. είναι παράλληλη στον άξονα ψψ΄. Ποια είναι, τότε, η εξίσωσή της;
ii. είναι παράλληλη στον άξονα χχ΄. Ποια είναι, τότε, η εξίσωσή της;
iii. διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

13. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1:(\alpha+2)x-y-1=0$ και $\varepsilon_2:\alpha x+2y-\beta=0$.
(α) Να βρείτε την γωνία των ευθειών ε_1, ε_2 όταν α = 1.
(β) Να βρείτε τα α,β ,ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες και να απέχουν μεταξύ τους απόσταση 2 μονάδες.

14. Δίνεται η ευθεία (ε) : 2x −3y −4 = 0. Να βρείτε:
(α) τη γωνία που σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οχ.
(β) την εξίσωση ευθείας η οποία είναι:
i. συμμετρικής της (ε) ως προς τον άξονα των τετμημένων.
ii. συμμετρική της (ε) ως προς τον άξονα των τεταγμένων.
(γ) τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου του Α(4, 1) ως προς την ευθεία (ε).

15. Τριγώνου ΑΒΓ δίνονται Β(-1,1), Γ(3,0) και Ε=$\frac{7}{2}$ τετρ. μονάδες. Αν η κορυφή Α βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο και ανήκει στην ευθεία ψ = χ, να βρεθούν οι συντεταγμένες της.

16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Γ(-3,-4), εξίσωση ύψους ΒΔ: χ+ ψ=4 και εξίσωση διαμέσου ΒΜ: χ + 4ψ=1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Β.

17. Οι ε_1: 2χ – ψ + 5 = 0 και ε_2: χ – 2ψ + 4 = 0 είναι οι εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Αν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται στο Κ(1, 4), να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου.

18. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με εξίσωση της πλευράς ΑΒ: $x+4y=6$ και εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ: $x-6y=6$. Αν το σημείο (2,1) είναι μία από τις κορυφές του παραλληλογράμμου, να βρείτε:
(α) Αν Η(3,κ) είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου, να δείξετε ότι κ=$-\frac{1}{2}$
(β) Τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου.
(γ) Την απόσταση μεταξύ των ευθειών ΑΒ και ΓΔ.
(δ) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

19. Τα σημεία $A(-1,4)$ και $B(7,6)$ είναι διαδοχικές κορυφές ενός ρόμβου $AB\Gamma\Delta$. Η εξίσωση μίας διαγωνίου του ρόμβου είναι $y=x-1$. Να βρείτε:
(α) την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του ρόμβου
(β) το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου
(γ) τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών του ρόμβου
(δ) το εμβαδόν του ρόμβου
(ε) την εφαπτομένη της γωνίας $\Delta\hat{A}B$.

20. Ρόμβος ΑΒΓΔ έχει εξίσωση πλευράς $AB:\ y-7x+6=0$ και εξίσωση διαγωνίου $A\Gamma:\ x-3y+2=0$.

Μία από τις κορυφές του έχει συντεταγμένες $(6,-4)$ και Κ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του ρόμβου και του σημείου Κ.
(β) Αν Κ (4,2) να βρείτε την απόσταση του σημείου Κ από την πλευρά ΑΒ.
(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ρόμβου.

21. Τα σημεία $A(-1,4)$ και $B(7,6)$ είναι διαδοχικές κορυφές ενός ρόμβου ΑΒΓΔ. Η εξίσωση μίας διαγώνιου του ρόμβου είναι $y=x-1$. Να βρείτε:

(α) την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του ρόμβου.

(β) το σημείο τομής των διαγώνιων του ρόμβου.

(γ) την περίμετρο του.

22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(-2,5)$, $B(2,1)$ και $\Gamma(6,3)$. Αφού τα τοποθετήσετε σε άξονα, να βρείτε:

(α) την εξίσωση της πλευράς ΑΒ και της μεσοκάθετης της

(β) την απόσταση της κορυφής Γ από την ΑΒ

(γ) την προσανατολισμένη γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ (κατά προσέγγιση ακεραίου)

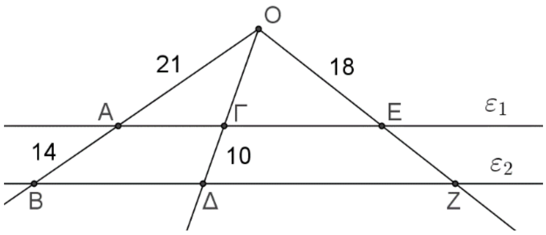
(δ) την εξίσωση του ύψους ΑΔ και της διαμέσου ΑΜ

(ε) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

(στ) το συμμετρικό σημείο της κορυφής Γ ως προς την πλευρά ΑΒ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ, ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

1. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_1$. Να υπολογίσετε το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΓ και ΕΖ.

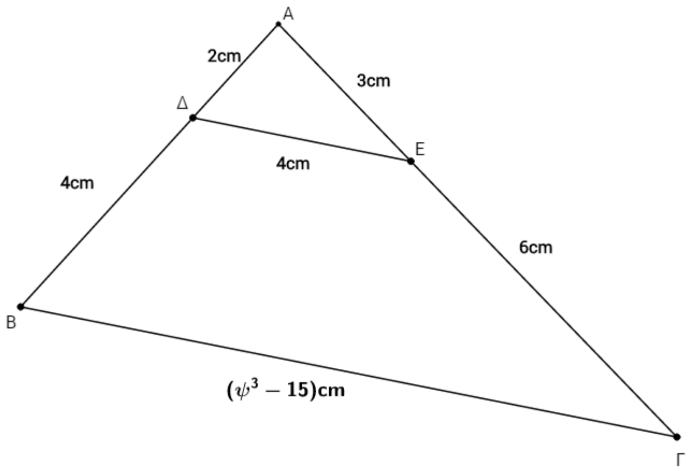


2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η ευθεία που ορίζεται από το Β και το μέσο Ε της διαμέσου ΑΔ τέμνει τη ΑΓ στο Ζ .Να αποδείξετε ότι $\frac{ZA}{Z\Gamma} = \frac{1}{2}$.

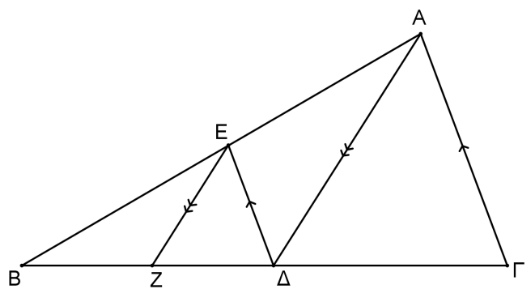
3. Ευθεία // προς τη διάμεσο ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τις ΑΒ, ΒΓ ,ΓΑ στα Ε,Ζ,Η αντίστοιχα .Να αποδείξετε $\frac{AE}{AH} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

4. Από σημείο Δ της πλευράς ,ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρω ΔΕ//ΒΓ από το Ε φέρω ΕΖ//ΑΒ και από το Ζ τη ΖΗ//ΓΑ. Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}$.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε:
(ΑΔ)=2cm, (ΒΔ) = 4cm , (ΑΕ) = 3cm , (ΕΓ) = 6cm ,
(ΔΕ) = 4cm και (ΒΓ) = (ψ^3-15)cm.
(α) Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη με την ΒΓ.
(β) Να υπολογίσετε την τιμή του ψ.



6. Στο διπλανό σχήμα ΔΕ // ΑΓ και ΕΖ // ΑΔ. Να δείξετε ότι $\frac{BZ}{B\Delta} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}$.



8. Σε κύκλο (Ο, ρ) φέρουμε την εφαπτομένη (ε) σε ένα σημείο Α του κύκλου. Από σημείο Ρ της εφαπτομένης φέρουμε μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει την χορδή ΒΓ στο Δ, να δείξετε ότι ΡΑ=ΡΔ.

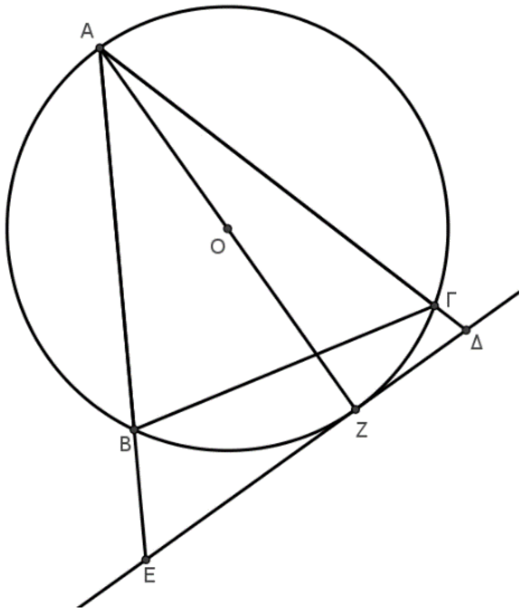
9. Από σημείο Σ που βρίσκεται εκτός του κύκλου (Κ, R), φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα ΣΓ (Γ σημείο επαφής) και τέμνουσα ΣΑΒ που περνά από το κέντρο του κύκλου. Η κάθετη στην ΣΒ στο σημείο Σ τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο σημείο Δ.

(α) Να κάνετε το σχήμα.
(β) Να αποδείξετε ότι $(AB)(\Sigma B)=(B\Delta)(B\Gamma)$
(γ) Να αποδείξετε ότι $(\Sigma\Gamma)^2=(\Sigma A)(\Sigma B)$

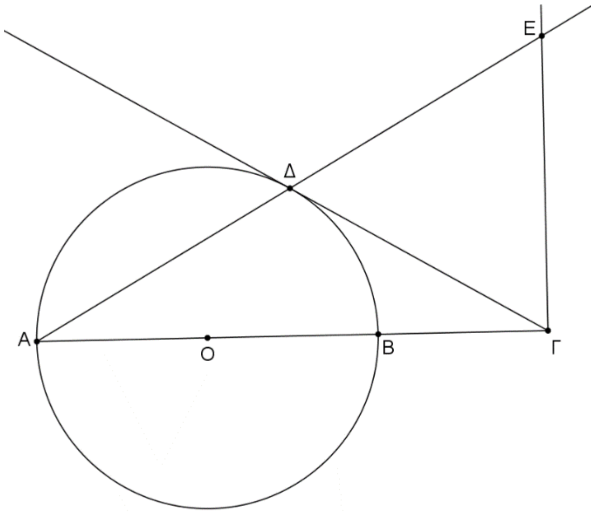
10. Δίνεται κύκλος (Κ,R) και ΑΒ μια διάμετρος του. Η Αχ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Αν Γ είναι τυχαίο σημείο της Αχ και η ΒΓ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Δ περνά από το μέσο της ΑΓ.

11. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Από την κορυφή Α φέρουμε διάμετρο ΑΖ. Στο σημείο Ζ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου που τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:
(α) $(\Gamma Z)^2=(A\Gamma)\cdot(\Delta\Gamma)$
(β) $(AB)\cdot(E\Delta)=(A\Delta)\cdot(B\Gamma)$



12. Στο διπλανό σχήμα , δίνεται κύκλος (O,R) , ΑΒ διάμετρος του κύκλου, ΓΔ εφαπτομένη του κύκλου στο Δ και ΓΕ κάθετη στη ΑΓ . Να δείξετε ότι:



(α) $A\overset{\Delta}{B}\Delta$ και $A\overset{\Delta}{\Gamma}E$ είναι όμοια,

(β) $(AB)\cdot(A\Gamma)=(AE)\cdot(A\Delta)$,

(γ) $(A\Delta)\cdot(\Gamma\Delta)=(A\Gamma)\cdot(B\Delta)$

(δ) $\Gamma\overset{\Delta}{\Delta}E$ ισοσκελές

13. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$, φέρουμε το ύψος ΑΔ . Από το Δ φέρουμε τη ΔΕ κάθετη στην ΑΒ. Να δείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΔ είναι όμοια

(β) $(A\Delta)^2 = (A\Gamma)(\Delta E)$

13. Σε κύκλο με κέντρο Ο φέρουμε τη διάμετρο ΑΒ , την χορδή ΒΓ και την διάμεσο ΟΜ του τριγώνου ΟΒΓ. Η προέκταση της ΟΜ τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου στο Α στο σημείο Τ. Να δείξετε ότι :

(α) τα τρίγωνα ΟΒΜ και ΑΒΓ είναι όμοια και

(β) (ΟΜ)(ΑΤ)=(ΟΑ)(ΜΒ).

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με διάμετρο το ύψος ΑΔ να γράψετε κύκλο που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα . Να δείξετε ότι:

(α) $(\Delta Z)^2=(AZ)(Z\Gamma)$ και

(β) $A\overset{\Delta}{B}\Gamma \approx A\overset{\Delta}{E}Z$

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΠΑΡΑΒΟΛΗ – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να σχηματίσετε εξίσωση β΄ βαθμού με λύσεις $x_1 = 5$ και $x_2 = -2$.

2. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = (-4\lambda + 12)x^2$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:
(α) η παραβολή να περνά από το σημείο (-1,4).
(β) η παραβολή να παρουσιάζει μέγιστο.

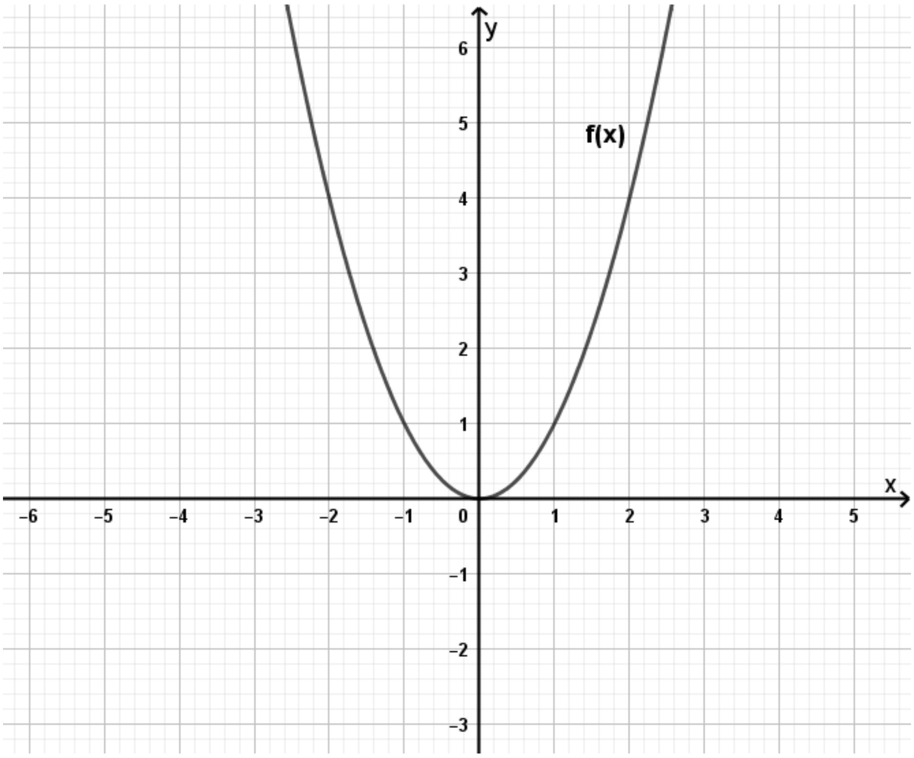
3. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$.

Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων (που δίνεται δίπλα) και να **δώσετε τον τύπο των συναρτήσεων** f_1, f_2, f_3 **όπου:**

(α) f_1 είναι η συνάρτηση $f(x)$ μετατοπισμένη 2 μονάδες προς τα κάτω,

(β) f_2 είναι η συνάρτηση $f(x)$ μετατοπισμένη 3 μονάδες δεξιά,

(γ) f_3 είναι η συνάρτηση $f(x)$ μετατοπισμένη 4 μονάδες αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω.



4. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 8x + 5 = 0$, να υπολογίσετε (χωρίς να λύσετε την εξίσωση) τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

α) $x_1 + x_2$ β) $\dfrac{5}{x_1} + \dfrac{5}{x_2}$ γ) $\dfrac{2x_2}{1 + \dfrac{x_2}{x_1}}$ δ) $x_1^{\,3} \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^{\,3}$

5. Να βρείτε δύο αριθμούς που η διαφορά τους είναι 4 και το διπλάσιο του γινομένου τους είναι 24.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (3\lambda - 5)x + 6 - 4\kappa$ όπου $\kappa, \lambda \in$. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές των κ και λ ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει κορυφή $K(-4,8)$.

7. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -3x^2 + \beta x + \gamma$ με ρίζες τους αριθμούς -5 και 2. Να βρείτε το πρόσημο των $f(-10)$, $f(-2.5)$, $f(1)$ και $f(8)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις. (Δικαιολογήστε)

α) Αν η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $K(8,0)$ τότε ισχύει:

(i) $\gamma = 0$ (ii) $\Delta > 0$ (iii) $\Delta = 0$ (iv) $\gamma = 8$

β) Αν ο άξονας συμμετρίας της είναι ο $x = 2$ και η μια της λύση είναι $x_1 = -3$, τότε η άλλη λύση της είναι:

(i) $x_2 = 3$ (ii) $x_2 = -7$ (iii) $x_2 = 6$ (iv) $x_2 = 7$

γ) Η συνάρτηση $y = -3(x-2)^2 + 1$ έχει σύνολο τιμών:

(i) $[1, +\infty)$ (ii) $(-\infty, 1]$ (iii) $[-2, +\infty)$ (iv) $(-\infty, 2]$

δ) Αν $f(3) < 0$ και $f(-5) > 0$ τότε η συνάρτηση f(x):

(i) Δεν έχει πραγματικές λύσεις

(ii) Έχει 2 πραγματικές και άνισες λύσεις

(iii) Έχει 2 πραγματικές και ίσες λύσεις

(iv) Έχει άπειρες λύσεις

ε) Αν $f(x) = -4x^2 + 8x - 16$, τότε η f(x) μπορεί να δοθεί στη μορφή:

(i) $4(x-1)^2 - 12$ (ii) $-4(x+1)^2 - 12$ (iii) $-4(x-1)^2 + 12$ (iv) $-4(x-1)^2 - 12$

9. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{2x^2 + 3x - 9}{5x^2 - 45}$.

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda^2 + 1)x + \lambda^2 - \lambda + 4 = 0$ με λύσεις x_1, x_2. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ ισχύει η σχέση $3x_1 + 3x_2 + 2x_1x_2 \leq 2$.

11. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha\neq 0$.

A. Να βρείτε:

i) Το πρόσημο του α.

ii) Τον άξονα συμμετρίας της.

iii) Τις λύσεις της εξίσωσης $y=0$.

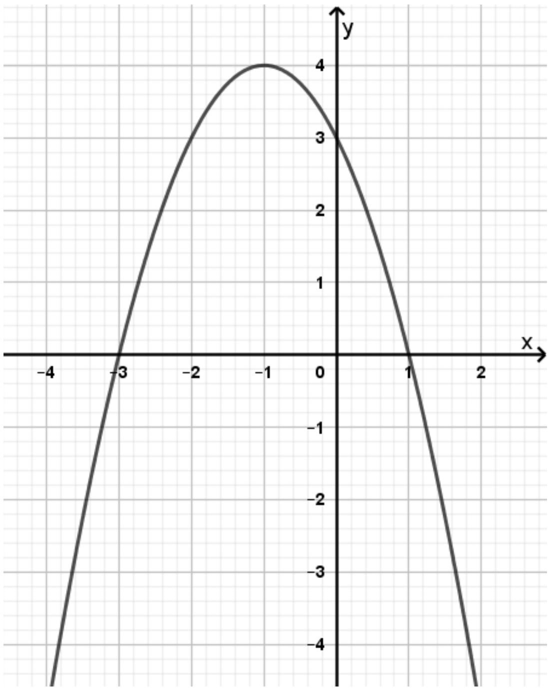
iv) Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ.

v) Το σύνολο τιμών.

vi) Τις τιμές των α, β και γ

vii) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $0\leq f(x)<3$

B. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει για κορυφές την αρχή των αξόνων, την κορυφή της παραβολής και το σημείο τομής της ευθείας $y=3$ και της $f(x)$ με αρνητική τετμημένη.



12. Να λύσετε τις ανισότητες:

α) $x^2-5x-6<0$

β) $x^2+x+1\geq 0$

γ) $(x+4)^2\geq 4(2x+5)$

δ) $x^2-2x+1>0$

ε) $\dfrac{(x^2+1)(6-2x)}{(2-x)^2}<0$

13. Να βρείτε τις τιμές του $\mu\in R$ ώστε η εξίσωση $(\mu-1)x^2+4x+(6-\mu)=0$:

α) να έχει λύσεις πραγματικές.

β) να μην έχει πραγματικές λύσεις.

γ) να έχει άξονα συμμετρίας τον $x=-2$.

δ) να έχει λύση τον αριθμό 1.

ε) να έχει λύσεις αντίστροφες.

14. Να δείξετε ότι το τριώνυμο x^2-kx+k^2+3 διατηρεί σταθερό πρόσημο $\forall\, k\in R$.

15. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x+3}-4}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 8: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1. Σε μια εταιρεία, το 2007 ο μέσος μηνιαίος μισθός των υπαλλήλων της, ήταν £800 (λίρες). Την επόμενη χρονιά οι μισθοί μετατράπηκαν σε ευρώ με την ισοτιμία €1,7 για κάθε £1 και παράλληλα έδωσαν σε κάθε υπάλληλο επιπλέον €50 στον μηνιαίο του μισθό. Ποιος ήταν ο μέσος μηνιαίος μισθός των υπαλλήλων της εταιρείας το 2008;

2. Ένας φοιτητής για το $1^{ο}$ τετράμηνο πήρε στα τέσσερα μαθήματα του, τους βαθμούς 7, 4, 6 και 9. Τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογα με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος που είναι 5, 3, 4 και 6 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την τελική του βαθμολογία για το $1^{ο}$ εξάμηνο.

3. Σε ένα ασανσέρ στο ισόγειο μιας πολυκατοικίας βρίσκονται 8 άτομα με μέσο βάρος 65 κιλά. Στον δεύτερο όροφο κατεβαίνουν 3 άτομα με μέσο βάρος 70 κιλά. Στον πέμπτο όροφο μπαίνει ένα νέο άτομο και το μέσο βάρος γίνεται 64 κιλά. Πόσα κιλά ζυγίζει το άτομο αυτό;

4. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα που είχαν οι μαθητές ενός τμήματος σε ένα διαγώνισμα των Μαθηματικών.

Βαθμός	8	10	12	13	15	18	19	20
Αριθμός μαθητών	1	2	3	2	3	2	1	1

Να υπολογίσετε:
(α) τη μέση τιμή των πιο πάνω παρατηρήσεων,
(β) το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων.
(γ) Την τυπική απόκλιση των πιο πάνω παρατηρήσεων.

5. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των ημερών που απουσίαζαν οι υπάλληλοι μιας εταιρείας κατά τους χειμερινούς μήνες.

Αριθμός ημερών (x_i)	0	1	2	3	4
Αριθμός υπαλλήλων (f_i)	4	4	3	6	3

Να υπολογίσετε:
(α) Το συνολικό αριθμό των υπαλλήλων της εταιρείας.
(β) Το εύρος των πιο πάνω παρατηρήσεων.
(γ) Τη μέση τιμή των πιο πάνω παρατηρήσεων.
(δ) Την τυπική απόκλιση των πιο πάνω παρατηρήσεων.
(ε) Τον συντελεστή μεταβλητότητας των πιο πάνω παρατηρήσεων.
(στ) Τη νέα μέση τιμή των ημερών απουσίας αν δυο συγκεκριμένες μέρες του Ιανουαρίου οι υπάλληλοι δεν πήγαν στη δουλειά τους, λόγω ανακαίνισης των γραφείων τους.

6. Στο πιο κάτω φυλλογράφημα δίνεται ο χρόνος αναμονής, σε λεπτά, 19 επιβατών μιας πτήσης μέχρι να εξυπηρετηθούν στο γραφείο ελέγχου αποσκευών.

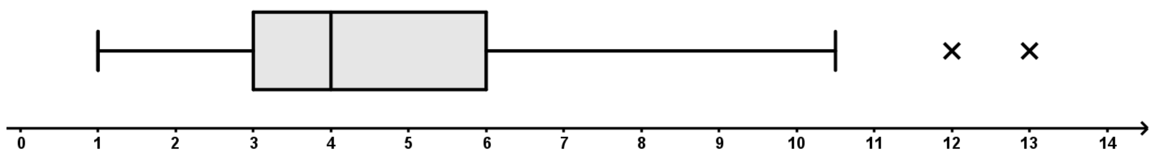
(α) Να βρείτε τον ελάχιστο και μέγιστο χρόνο αναμονής, καθώς και το εύρος των παρατηρήσεων.

(β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο των παρατηρήσεων.

(γ) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα και να εξετάσετε αν υπάρχουν ακραίες τιμές.

2	2
1	9
1	0 0 1 1 2 3
0	5 5 5 6 6 7 8
0	2 2 3 3

7. Το πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζει τον αριθμό γραπτών που διορθώνουν ανά ώρα, 15 καθηγητές του Λυκείου Δασούπολης.



(α) Να βρείτε τον μέγιστο και ελάχιστο αριθμό γραπτών που διορθώνονται σε μια ώρα.

(β) Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

(γ) Να καταγράψετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

(δ) Να δηλώσετε, αν υπάρχουν, τις ακραίες τιμές των παρατηρήσεων.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023 - 2024

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 20 Μαΐου 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων, να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας **το όνομά σας**.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση και μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1. Να λύσετε την ανίσωση: $(x+2)(x-3) \leq 0$

Α2. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων $(K, 6\ cm)$ και $(\Lambda, 9\ cm)$ με απόσταση $K\Lambda = 7\ cm$.

Α3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$ και σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα των τετμημένων.

Α4. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\dfrac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} + \sigma\upsilon\nu x = \tau\epsilon\mu x$

β) $\varepsilon\varphi x \cdot (\sigma\varphi x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$

Α5. α) Να διατυπώσετε τον ορισμό των ίσων διανυσμάτων. **(1,5 μονάδα)**

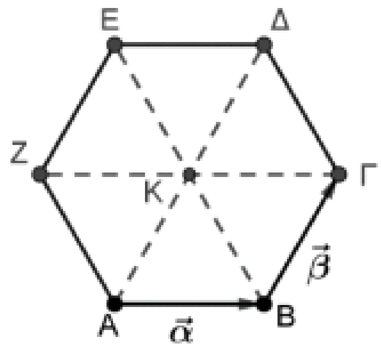
β) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ (δηλ. έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνιές του ίσες), με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$.

(Σημείωση: Ισχύει ότι $E\Delta // Z\Gamma // AB,\ ZE // A\Delta // B\Gamma,\ AZ // BE // \Gamma\Delta$.)

i. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{BE}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **(4,5 μονάδες)**

ii. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{BE} = 4\vec{\beta} - 4\vec{\alpha}$ **(1 μονάδα)**

iii. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\mu} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{BE}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\overrightarrow{BK}$. **(3 μονάδες)**



Α6. Δίνεται η παραβολή $f(x) = 3x^2 - 12x + 11,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της. **(1,5 μονάδες)**

β) Να εξετάσετε αν έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή και να την υπολογίσετε. **(2 μονάδες)**

γ) Χωρίς να βρείτε τις λύσεις x_1, x_2 της εξίσωσης $f(x) = 0$, να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ακέραιους συντελεστές που να έχει λύσεις τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. **(6,5 μονάδες)**

<u>ΜΕΡΟΣ Β</u>: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες, ενώ οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής f με εξίσωση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$. Να βρείτε:

α) Το πρόσημο του α (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας), **(1,5 μονάδα)**

β) την τιμή του γ (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας), **(1,5 μονάδα)**

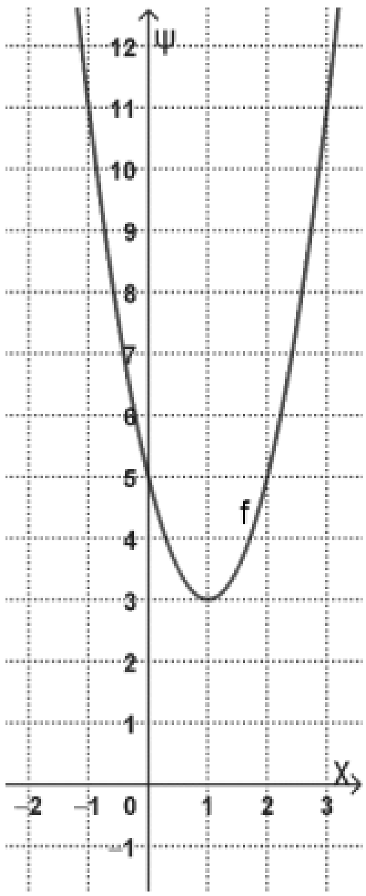
γ) τις συντεταγμένες της κορυφής της f, **(1 μονάδα)**

δ) το σύνολο τιμών της f, **(1 μονάδα)**

ε) το πρόσημο της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας), **(2 μονάδες)**

στ) τις λύσεις x_1, x_2 της εξίσωσης: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 11$, **(1 μονάδα)**

ζ) τις λύσεις της ανίσωσης: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq x$. **(2 μονάδες)**



Β2. Δίνεται η σχέση: $\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi(\pi-\theta)\cdot\eta\mu(3\pi-\theta)}{\sigma\upsilon\nu(-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}=-\frac{1}{2},\quad \theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$. **(5 μονάδες)**

β) Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A=6\sigma\varphi\theta-2\eta\mu\theta$. **(7 μονάδες)**

γ) Να βρείτε τη γωνία θ. **(1 μονάδα)**

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας θ με τον τριγωνομετρικό κύκλο, αν αυτή τοποθετηθεί σε κανονική θέση σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. **(2 μονάδες)**

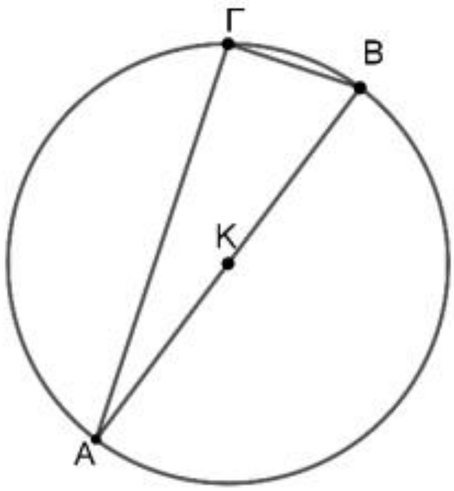
Β3. Δίνεται κύκλος (K,ρ), και το εγγεγραμμένο σε αυτόν τρίγωνο $AB\Gamma$ με την πλευρά του AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Αν $A(4,-2), K(7,2)$ και η χορδή $A\Gamma$ είναι παράλληλη με την ευθεία $3x-y+5=0$, να βρείτε:

α) την εξίσωση της διαμέτρου AB, **(2 μονάδες)**

β) την εξίσωση της χορδής $B\Gamma$, **(7 μονάδες)**

γ) τις συντεταγμένες του σημείου Γ. **(3 μονάδες)**

δ) Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου (K,ρ) στο σημείο του A και παίρνουμε πάνω σε αυτή σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta=A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι ίσες. **(3 μονάδες)**



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024-2025
Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 16 Μαΐου 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Α΄ ΣΕΙΡΑ
ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων **εκτός αν σας ζητηθεί στην άσκηση.**
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας **το όνομά σας**.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

Α1 Αν $ημθ = \frac{3}{5}$, $90° < θ < 180°$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$A = 3συνθ$

Α2 Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις πιο κάτω προτάσεις ως Ορθή (Ο) ή Λανθασμένη (Λ) και να μεταφέρετε τον πιο κάτω πίνακα απαντήσεων στο τετράδιο απαντήσεων σας.

	Πρόταση
Α	Για κάθε $α, β \geq 0$ ισχύει $\sqrt[3]{8α^3 \cdot β^6} = 2α \cdot β^2$
Β	$\begin{vmatrix} α & β \\ γ & δ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} α & γ \\ β & δ \end{vmatrix}$
Γ	Η παραβολή $f(x) = (x+2)^2 + 3$ έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $K(2,3)$
Δ	Αν $Δ < 0$, τότε η συνάρτηση της f με τύπο $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$, είναι ομόσημη του $α$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Α	Β	Γ	Δ

Α3 Δίνονται οι αριθμοί $A = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ και $B = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

(α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A και B είναι αντίστροφοι. **(4 μονάδες)**

(β) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

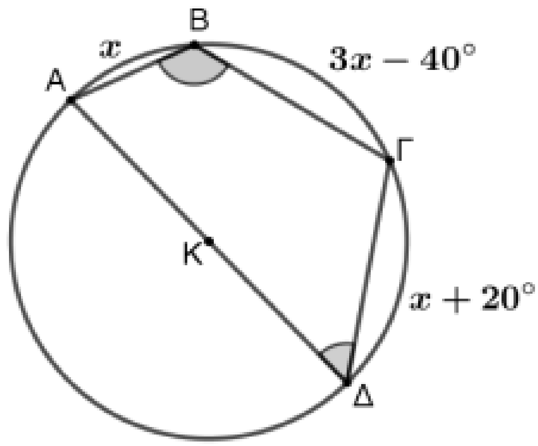
i) $A^2 + B^2$ **(4 μονάδες)**

ii) $(A + B)^2$ **(2 μονάδες)**

Α4 Δίνεται κύκλος $(K,\ R)$, με διάμετρο $ΑΔ$ και $ΑΒΓΔ$ εγγεγραμμένο τετράπλευρο με τόξα $\overset{\frown}{AB} = x$, $\overset{\frown}{BΓ} = 3x - 40°$ και $\overset{\frown}{ΓΔ} = x + 20°$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του x

(β) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $Α\hat{Δ}Γ$ και $Α\hat{Β}Γ$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



Α5 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 2)x - 4 - \lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. **(4 μονάδες)**

(β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2$$ **(6 μονάδες)**

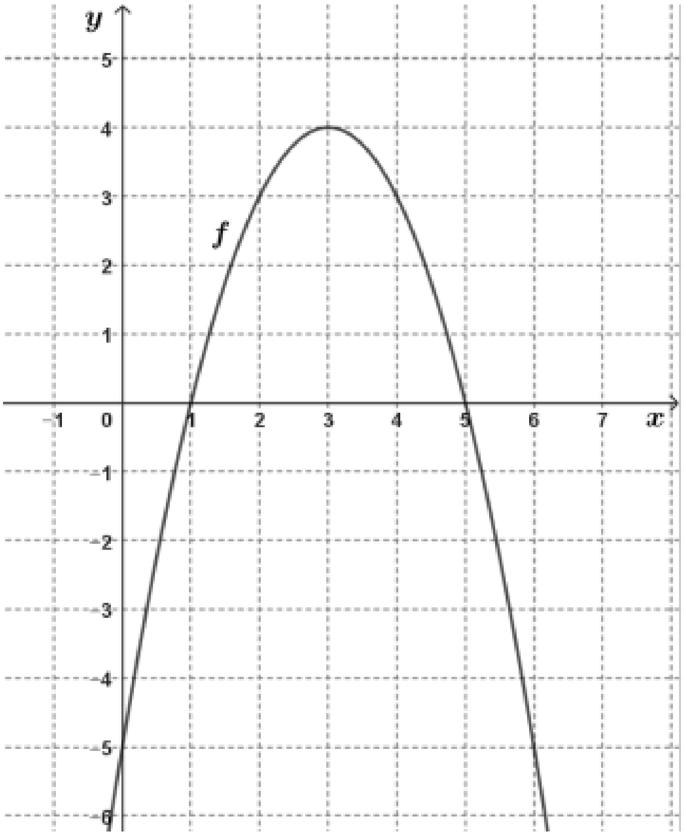
Α6 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

(α) $$\frac{σφ(180° + ω)}{συν(-ω)} + \frac{σφ(90° + ω)}{συν(270° + ω)} = στεμω - τεμω$$

(β) $$\frac{συν^3 ω}{ημω} + \frac{εφω}{1 + εφ^2 ω} = σφω$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες και οι ασκήσεις Β2 και Β3 με δεκαπέντε (15) μονάδες.

Β1 Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$.



(α) Να βρείτε:

i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f **(0,5 μονάδα)**

ii) το πρόσημο της διακρίνουσας (Δ) της εξίσωσης $f(x) = 0$ **(0,5 μονάδα)**

iii) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής **(0,5 μονάδα)**

iv) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής **(0,5 μονάδα)**

v) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ **(1 μονάδα)**

vi) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$ **(1 μονάδα)**

(β) Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ **(3 μονάδες)**

(γ) Αν $\alpha = -1,\ \beta = 6,\ \gamma = -5$, να λύσετε την ανίσωση:

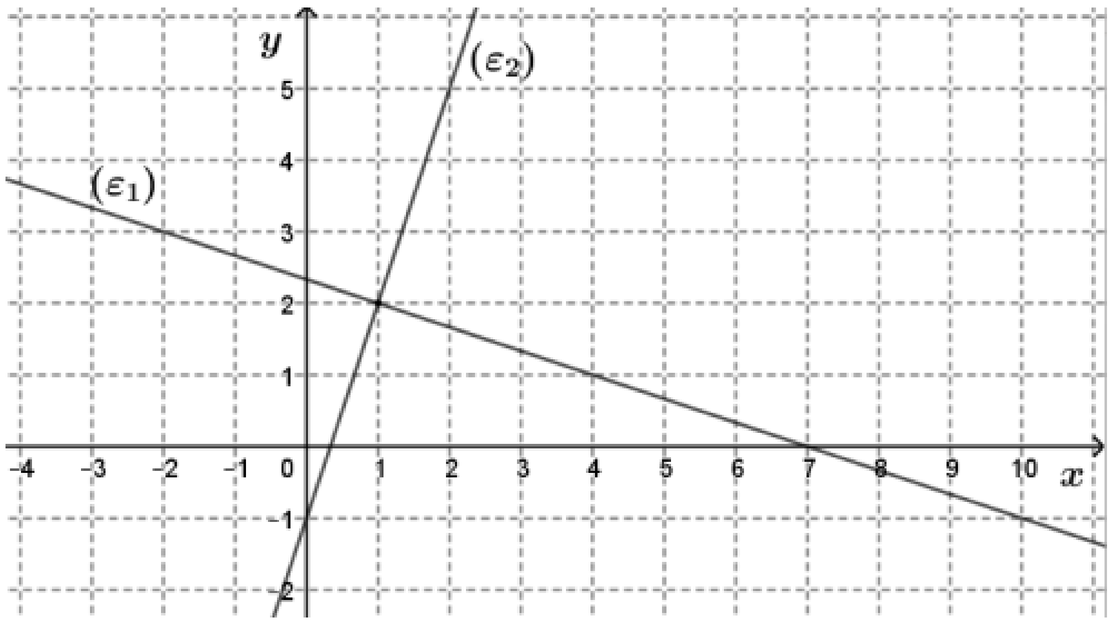
$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)(1 - x) < 0$ **(3 μονάδες)**

Β2 Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): x+3y=7$ και $(\varepsilon_2): y=\mu(\mu-2)x-1,\ \mu\in\mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές του μ, ώστε οι πιο πάνω ευθείες να είναι κάθετες.

(4 μονάδες)

(β) Αν $\mu=-1$, A το σημείο τομής των ευθείων (ε_1) και (ε_2), B το σημείο τομής της ευθείας (ε_1) με τον άξονα των τετμημένων και Γ το σημείο τομής της ευθείας (ε_2) με τον άξονα των τεταγμένων, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα, τότε:



i) να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ είναι $-x+7y+7=0$

(4 μονάδες)

ii) να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία $B\Gamma$

(3 μονάδες)

iii) να υπολογίσετε την τιμή του α, $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε τα σημεία B,Γ και $H(5\alpha+4,\alpha-1)$ να είναι συνευθειακά. **(4 μονάδες)**

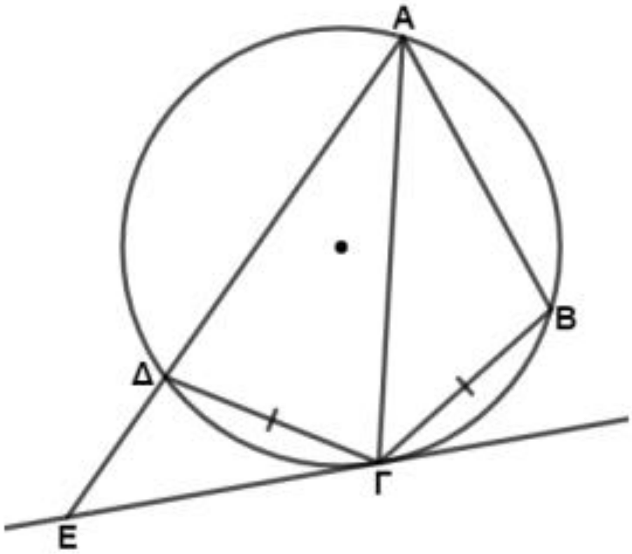
Β3 Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και ισχύει $ΒΓ = ΓΔ$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $Γ$ τέμνει την προέκταση της χορδής $ΑΔ$ στο σημείο $Ε$. Να αποδείξετε ότι:

(α) η χορδή $ΑΓ$ είναι διχοτόμος της $Β\hat{Α}Δ$ **(3 μονάδες)**

(β) τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΓ$ είναι όμοια **(6 μονάδες)**

(γ) $(ΑΒ)(ΔΕ) = (ΓΔ)(ΓΒ)$ **(3 μονάδες)**

(δ) $Α\hat{Ε}Γ = Α\hat{Δ}Β$ **(3 μονάδες)**



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΝΙΑΙΑ ΤΕΛΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 2024 – 2025

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Διάρκεια: 90 λεπτά

Το δοκίμιο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες

ΟΔΗΓΙΕΣ:
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 6x - 1 = 0$, με λύσεις x_1 και x_2. Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: (2022 – 2023 Β΄ Τετρ.)

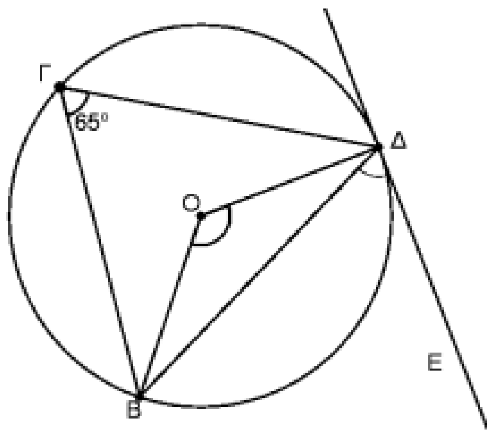
$$A = x_1 + x_2 + 4\,x_1 \cdot x_2$$

Α2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα σημεία του B, Γ και Δ. Η ευθεία ΔE είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Δ.

Αν $B\hat{\Gamma}\Delta = 65^\circ$, να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $B\hat{\Delta}E$ και $B\hat{O}\Delta$.

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)

(2022 – 2023 Α΄ Τετρ.)



Α3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: (2019 – 2020)

α) $\mathrm{A} = \sqrt{8} + 2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \sqrt{50}$

β) $\mathrm{B} = \dfrac{\sqrt{9\alpha^2\beta}}{\sqrt[3]{\alpha^6}}$, $\alpha > 0$ και $\beta \geq 0$

Α4. Να λύσετε την ανίσωση: (2021 – 2022 Β΄ Τετρ.)

$$\frac{(x-3)^2}{2x^2+7x+3} < 0$$

Α5. Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-6,2)$, $\Gamma(0,10)$. (2021 – 2022 Β΄ Τετρ.)

Να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

β) το μήκος του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$

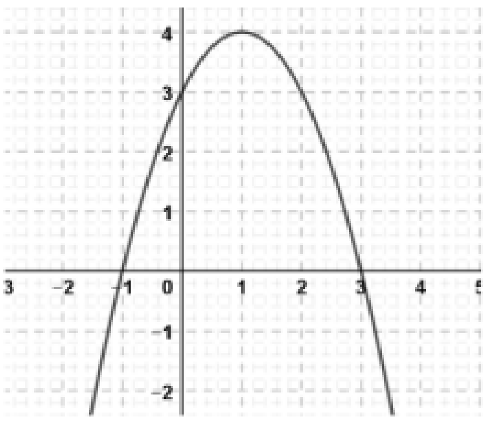
Α6. Να αποδείξετε την ταυτότητα: (2021 – 2022 Α΄ Τετρ.)

$$\tau\varepsilon\mu\theta - \varepsilon\varphi\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta} = 2\tau\varepsilon\mu\theta$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β</u>: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία ενώ η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$



Να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας. (2022 – 2023 Β΄ Τετρ.)

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (2 μον.)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (2 μον.)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 3$ (2 μον.)

δ) Να βρείτε τη διακρίνουσα και το είδος των λύσεων της εξίσωσης:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x-1)^2 + 4\,,$$

όπου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι η συνάρτηση $f(x)$ (4 μον.)

Β2. Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, όπου: (2022 – 2023 Α΄ Τετρ.)

$$A=\frac{\eta\mu(\pi-\omega)\cdot \sigma\upsilon\nu\,(\pi+\omega)\cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)}{\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\omega\right)\cdot \sigma\upsilon\nu\,(-\omega)} \quad \text{και} \quad B=\frac{\varepsilon\varphi\omega-\sigma\varphi\omega}{\tau\varepsilon\mu\omega\cdot \sigma\tau\varepsilon\mu\omega}$$

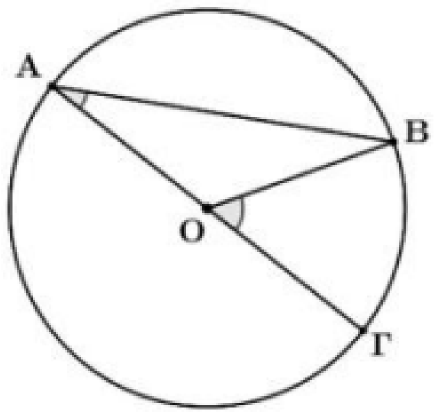
α) Να δείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu^2\omega$ (7 μον.)

β) Να δείξετε ότι $B = 2\eta\mu^2\omega - 1$ (5 μον.)

γ) Αν $4A + 4B = 3$ να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi^2\omega = 3$ (3 μον.)

Β3. α) Με βάση το πιο κάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι η εγγεγραμμένη γωνία ΓAB, κύκλου (O, ρ), ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας ΓOB. (5 μον.)

(2020 – 2021)



β) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρουμε το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου και τη διάμετρο του κύκλου AE. Να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι όμοια (7 μον.)

ii) $(AB)\cdot(A\Gamma) = (AE)\cdot(A\Delta)$ (3 μον.)

ΤΕΛΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ