ΛΥΚΕΙΟ ΑΡΧ. ΜΑΚΑΡΙΟΥ Γ΄ - ΔΑΣΟΥΠΟΛΗ **ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2025 – 2026**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ

2025-2026

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Α ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1 - ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω:
   (α) $\sqrt{9^2}=$ (β) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=$ (γ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\div\sqrt{3}=$ (δ) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6=$
   (ε) $9^{\frac{1}{2}}=$ (στ) $8^{\frac{2}{3}}=$ (ζ) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}=$ (η) $\sqrt[3]{8^7}=$

2. Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις:
   (α) $\sqrt[3]{4+\sqrt{14+\sqrt{2+\sqrt[4]{16}}}}=$ (β) $\sqrt{18}-\sqrt{32}+3\sqrt{100}=$ (γ) $(81x^8)^{\frac{1}{2}}=$
   (δ) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}=$ (ε) $8^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{2}=$ (στ) $x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{5}{4}}+2\frac{\sqrt[5]{x^7\cdot a^3}}{\sqrt[5]{x^2\cdot a^3}},(a>0,x>0)$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   (α) $x^{\frac{1}{3}}=4,\quad x\geq 0$ (β) $x^2=25$ (γ) $\sqrt{x-2}-3=0$
   (δ) $x^4+27x=0$ (ε) $(3x-7)^{\frac{1}{2}}-10=-2$

4. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:
   (α) $\frac{3}{\sqrt{3}}=$ (β) $\frac{3}{2-\sqrt{7}}=$ (γ) $\frac{10}{\sqrt[3]{5^2}}=$ (δ) $\frac{6}{\sqrt[5]{2^3}}=$ (ε) $\frac{5}{\sqrt{14}-2}=$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις: (Να φαίνονται οι ιδιότητες των ριζών)
   (α) $\sqrt[4]{2\beta}\cdot\sqrt[4]{8\beta^3},\quad \beta\geq 0$ (β) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ (γ) $\sqrt[4]{\left(\frac{8}{27}\right)^{-2}}$ (δ) $\sqrt{18}-4\sqrt{8}+2\sqrt{50}$

6. Να κάνετε τις πράξεις :
   (α) $\sqrt{3}(\sqrt{12}-\sqrt{27})$ (β) $(2\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{5}+\sqrt{7})$ (γ) $2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[6]{2^5}$ (δ) $\sqrt[3]{25+\sqrt{23+\sqrt[4]{13+\sqrt{9}}}}$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις :
   (α) $x^6-64=0$ (β) $\sqrt[3]{4x-1}+2=5$ (γ) $(3x-4)^{\frac{3}{5}}=8\ ,x\geq\frac{4}{3}$

8. Δίνονται οι αριθμοί $A=\sqrt[3]{\sqrt{3}}$ και $B=\sqrt[4]{3^3}$. Να δείξετε ότι : $B^4-A^6=24$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2 – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά των γωνιών

α) 170^0 β)-280^0 γ) 295^0 δ) 560^0 ε)-700^0

2. Να βρείτε σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας χ.

α) ημχ< 0 και εφχ> 0 β) συνχ>0 και σφχ< 0

3. Να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισότητες:

α) $\eta\mu^2 100^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 ... = 1$ β) $\eta\mu 100^\circ = \eta\mu ......$ γ) $\eta\mu 50^\circ = \sigma\upsilon\nu ...$

δ) $\sigma\upsilon\nu 155^\circ = \ ...25^\circ$ ε) $\sigma\varphi 15^\circ = \frac{...}{...15^\circ}$ στ) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{.....}{......}$

4. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

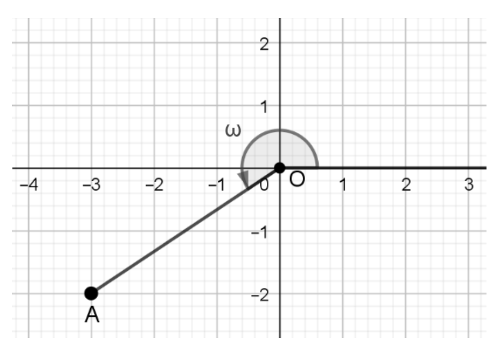
α) $(\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 1 - 2\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ β) $1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \varepsilon\varphi^2\theta = \sigma\upsilon\nu^2\theta$

γ) $\sigma\upsilon\nu x(1 + \sigma\upsilon\nu x) - \eta\mu x(1 - \eta\mu x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ δ) $\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\varphi\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta = 2\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

ε) $5\eta\mu^2\omega - 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 9\eta\mu^2\omega - 4$ στ) $\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\phi^2\theta + \varepsilon\phi^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$

z) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,(\sigma\varphi^2\alpha - \varepsilon\varphi^2\alpha) = \sigma\varphi^2\alpha - 1$

5. Η τελική πλευρά μιας γωνίας ω διέρχεται από το σημείο Α. Αν οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι $A(-3,-2)$ να βρείτε το ημω , συνω και εφω.



6. Αν $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}, \sigma\upsilon\nu\theta < 0$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 13\eta\mu(180^\circ - \theta) + \sigma\varphi(90^\circ - \theta)$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις στο διάστημα $0° < x < 180°$

(α) $\eta\mu x = \eta\mu 40°$ (β) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ (γ) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ (δ) $\varepsilon\varphi x = -1$ (ε) $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{5}{13}$ $, 270° < \theta < 360°$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A} = \frac{10\varepsilon\varphi\theta}{13\sigma\upsilon\nu\theta + 26\eta\mu\theta} =$

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\hat{A} = 30°$ και $\sigma\upsilon\nu B = -\frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ και να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

10. Αν $x = \sigma\varphi\omega$ και $y = \eta\mu\omega$, να δείξετε ότι: $1 + x^2 = \frac{1}{y^2}$

11. Μία γωνία θ σε κανονική θέση έχει τελική πλευρά, η οποία διέρχεται από το σημείο Α. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ, όταν το σημείο Α έχει συντεταγμένες:

(α) $A(5, -5)$ (β) $A\left(1, -\sqrt{3}\right)$ (γ) $A(4, -3)$

12. (α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$ ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο.

(β) Αν η τελική πλευρά της γωνίας ω που είναι σε κανονική θέση τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Α να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημω, συνω, εφω, σφω.

13. Η τελική πλευρά μιας γωνιάς ω που είναι σε κανονική θέση, τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Α με συντεταγμένες (κ,λ). Να αποδείξετε ότι:

(α)$\kappa^2 + \lambda^2 = 1$ (β) $\varepsilon\varphi\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\lambda + \kappa^2}{\kappa}$ (γ) $\sigma\varphi^2\omega + \varepsilon\varphi^2\omega = \frac{1}{\kappa \cdot \lambda}$

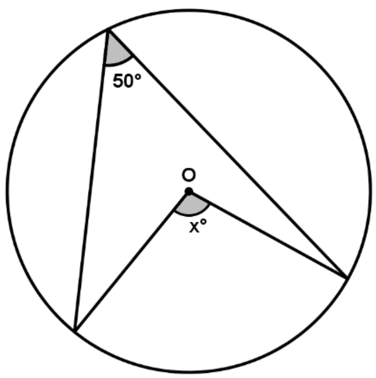
ΕΝΟΤΗΤΑ 3 – ΚΥΚΛΟΣ

1. Να βρείτε τη θέση των δύο κύκλων $(K, 8\ cm)$ και $(\Lambda, 6\ cm)$, αν γνωρίζετε ότι το μήκος της διακέντρου είναι:

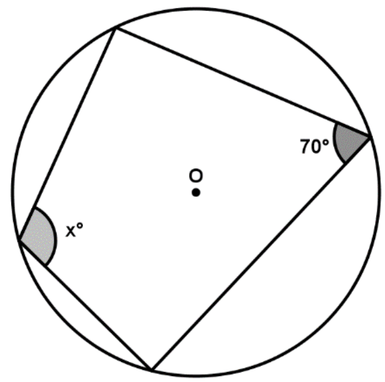
(α) ΚΛ=14 cm (β) ΚΛ=4 cm (γ) ΚΛ=18 cm (δ) ΚΛ=2 cm (ε) ΚΛ=1 cm

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας (Ο κέντρο του κύκλου):

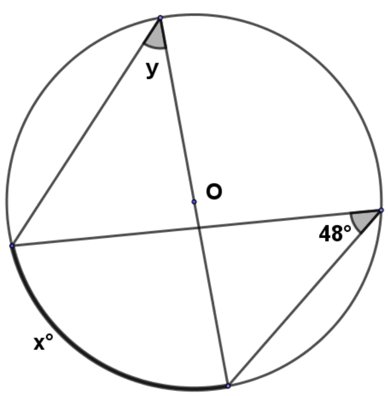
(α)



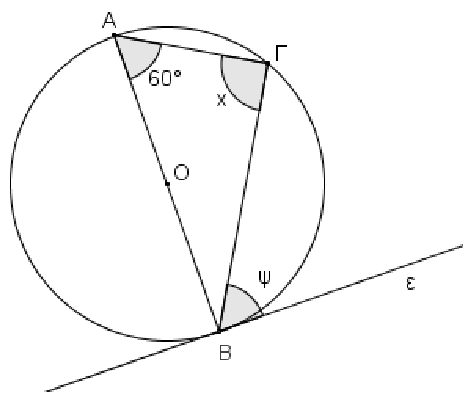
(β)



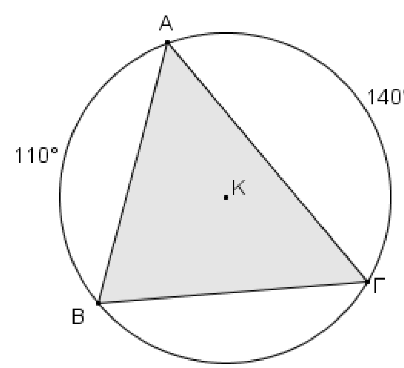
(γ)



(δ)



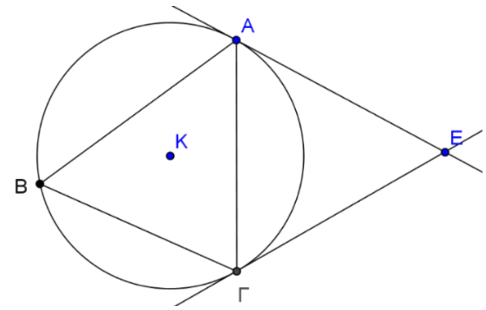
3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ,R) και τα τόξα$AB = 110°,\ A\Gamma = 140°$.
Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



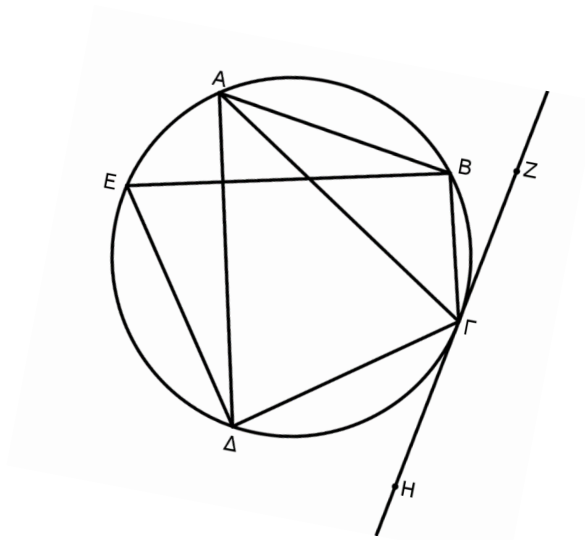
4. Να βρείτε τις τιμές της διακέντρου $ΚΛ$ των κύκλων $(K, 3\ cm)$ και $(Λ, 4\ cm)$, ώστε οι κύκλοι να:

(α) να εφάπτονται εσωτερικά (β) να είναι ξένοι μεταξύ τους εξωτερικά

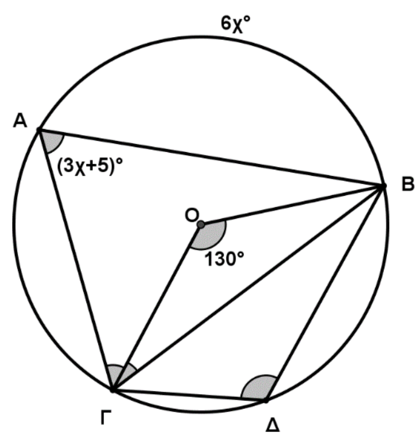
5. Από εξωτερικό σημείο Ε κύκλου φέρουμε τις εφαπτομένες $ΕΑ$ και $ΕΓ$ του κύκλου $(Κ, ρ)$ και $Α\hat{Β}Γ = 50°$.
Να υπολογίσετε τις γωνίες $Ε\hat{Γ}Α$, $Α\hat{Ε}Γ$ και $Γ\hat{Α}Ε$.



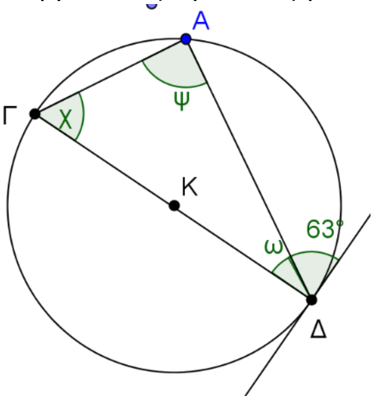
6. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ΖΗ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ.
Να συμπληρώσετε:
(α) Η γωνία **ΑΔΓ** ονομάζεται
…………………………………….
(β) Οι γωνίες **ΔΑΒ** και ………… είναι ίσες γιατί βαίνουν στο ίδιο τόξο.
(γ) Το ευθύγραμμο τμήμα **ΕΒ** ονομάζεται
…………………
(δ) Η γωνία **ΔΓΗ** ισούται με τη γωνία ………………



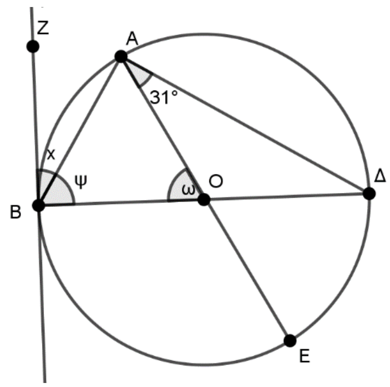
7. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο. Αν $\hat{A} = (3χ + 5)°$, $\widehat{ΒΟΓ} = 130°$ και τόξο $AB = 6x°$.
(α) Να δείξετε ότι $x = 20^{\circ}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.
(β) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:
(i) τη γωνία ΒΓΟ (ii) το τόξο ΑΒ
(iii) τη γωνία ΑΓΟ (iv) τη γωνία ΓΔΒ



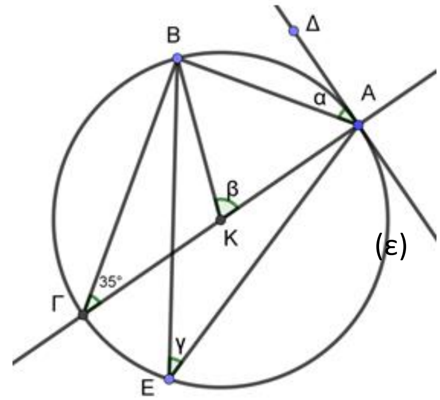
8. Να βρείτε τις άγνωστες γωνίες .



ΒΖ εφαπτομένη



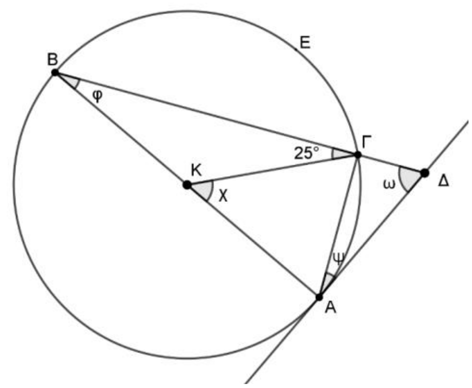
ΑΔ εφαπτομένη



(ε) εφαπτομένη

9. Στο σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο ΑΒ. Η ΑΔ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α και Δ σημείο τομής της προέκτασης της χορδής ΒΓ με την εφαπτομένη. Αν $\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 25°$,να υπολογίσετε:
(α) τις γωνιές φ, x, ψ, ω

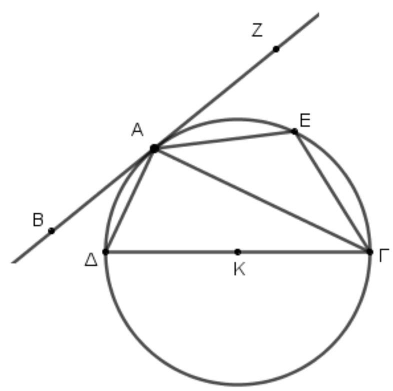
(β) το μέτρο του τόξου $\mathrm{BE\Gamma}$.



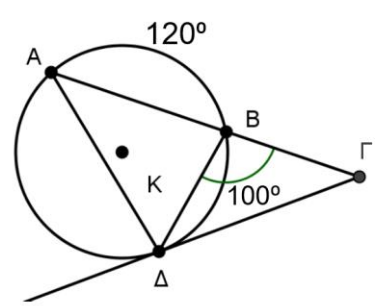
10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ,ρ).
Αν BZ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α, $AE = E\Gamma$ και γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma = 64°$,

Να υπολογίσετε (δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας):
(α) Τις γωνίες $\Delta\hat{A}\Gamma$, $B\hat{A}\Delta$ και $A\hat{E}\Gamma$.

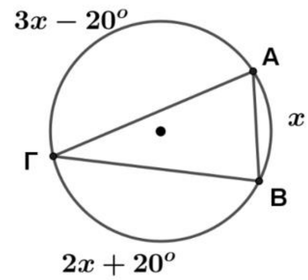
(β) Το μέτρο των τόξων $AE\Gamma$ και ΔAE.



11. Στο διπλανό σχήμα η ΔΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Κ,R) στο σημείο Δ, η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma = 100°$ και το τόξο $AB = 120°$.
(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ και
(β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{B\Gamma\Delta}$ είναι ισοσκελές.

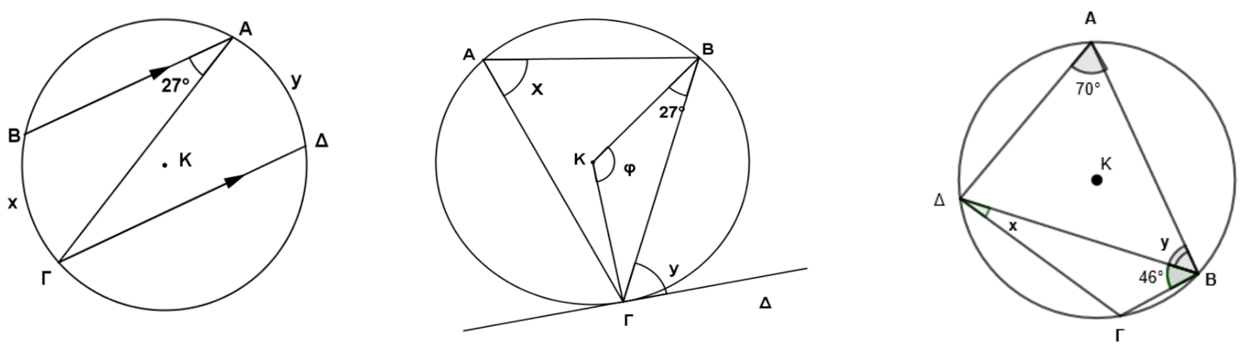


12. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και τα σημεία του Α,Β,Γ έτσι ώστε τα τόξα
$\overset{\frown}{AB} = x$, $\overset{\frown}{A\Gamma} = 3x - 20^\circ$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 2x + 20^\circ$.
Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

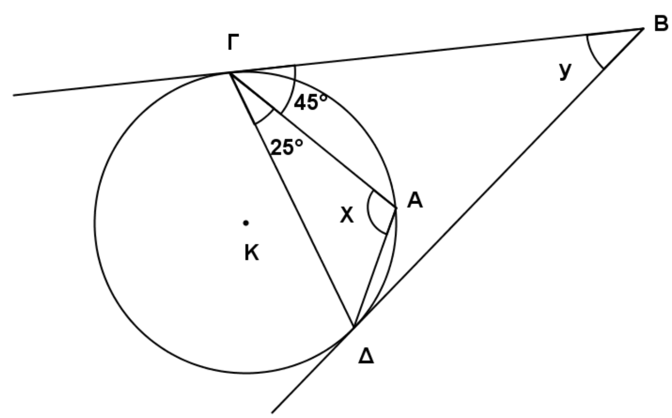


13. Να υπολογίσετε τις τιμές των χ,φ και ψ σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) (β) (γ)



14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος(K,R). Αν ΒΓ και ΔΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα , $A\hat{\Gamma}B = 45^\circ$ και $A\hat{\Gamma}\Delta = 25^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών x, y.
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

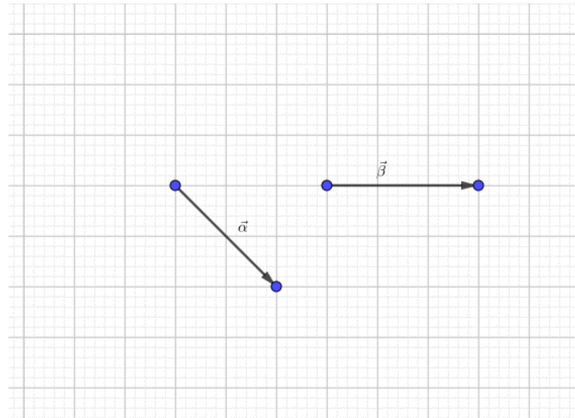


ΕΝΟΤΗΤΑ 4 – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα

(α) $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$,

(β) $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

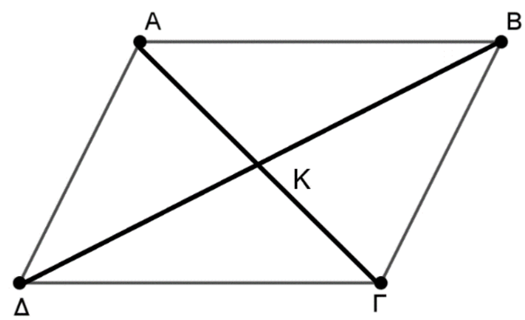


2. Αν το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο
(α) Να βρείτε δύο ίσα διανύσματα:

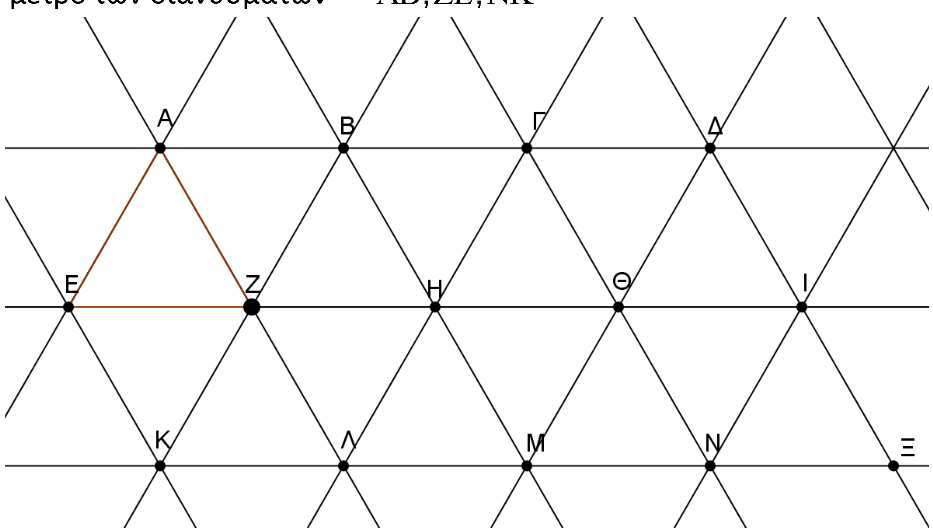
(β) Να βρείτε δύο αντίθετα διανύσματα:

(γ) Να βρείτε δύο διανύσματα ομόρροπα

(δ) Να βρείτε δύο διανύσματα αντίρροπα



3. Το σχήμα αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 3cm
(α) Να βρείτε δύο ζεύγη ομόρροπων διανυσμάτων
(β) Να βρείτε διάνυσμα αντίρροπο του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με διπλάσιο μέτρο
(γ) Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ZE}, \overrightarrow{NK}$



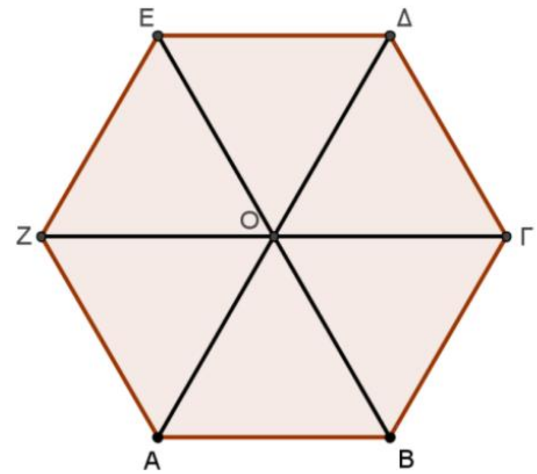
4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ μεόλες τις πλευρές ίσες με 1cm και τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Αν ΖΓ//ΕΔ,ΑΔ//ΖΕ, ΕΒ//ΔΓ , να βρείτε:

(α) Διάνυσμα ίσο με το $\overrightarrow{ΕΔ}$

(β) Διάνυσμα αντίθετο με το $\overrightarrow{ΖΟ}$

(γ) Διάνυσμα ίσο με το $\overrightarrow{ΕΔ} + \overrightarrow{ΔΓ}$

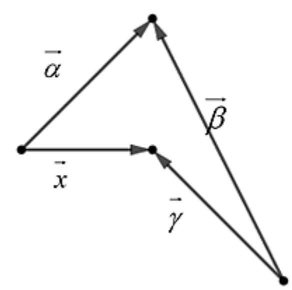
(δ) Διάνυσμα ίσο με το $\overrightarrow{ΔΟ} - \overrightarrow{ΟΓ}$



5. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

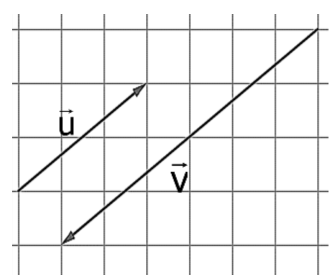
(α) Το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι ίσο με:

Α. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
Β. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
Γ. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$
Δ. $-\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

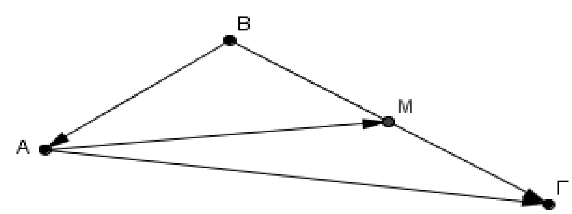


(β) Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι:

Α. Ομόρροπα
Β. Αντίρροπα
Γ. Αντίθετα
Δ. Κανένα από αυτά



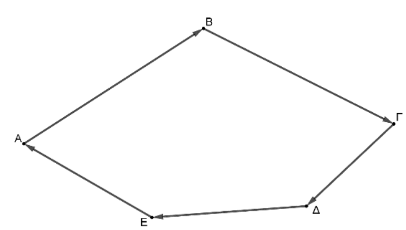
6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται $\overrightarrow{ΒΑ} = 2\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{ΑΓ} = 2\vec{\beta}$ και $ΒΜ = ΜΓ$.
Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΜΓ}$και $\overrightarrow{ΑΜ}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



7. Να χρησιμοποιήσετε το διπλανό σχήμα, για να βρείτε το διάνυσμα που αντιστοιχεί στα πιο κάτω:

(α) $\overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΕ} =$

(β) $\overrightarrow{ΑΔ} - \overrightarrow{ΕΔ} =$



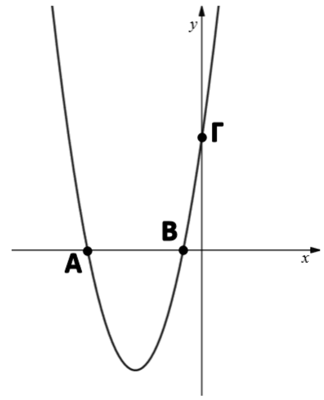
ΕΝΟΤΗΤΑ 5 - ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{y = 2x^2 + 7x + 3}$. Να βρείτε:

   (α) τις συντεταγμένες των σημείων Α , Β και Γ.

   (β) τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης.

   (γ) τις συντεταγμένες του ελάχιστου.



2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0}$. Από τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

   (α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

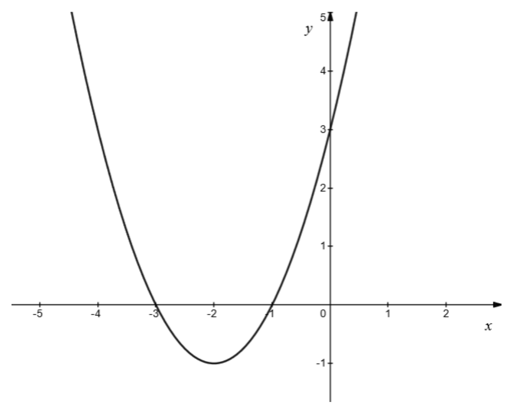
   (β) Τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης.

   (γ) Τις συντεταγμένες του ελάχιστου σημείου της συνάρτησης.

   (δ) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης

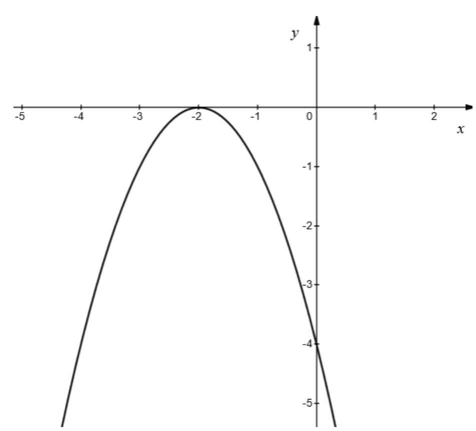
   (ε) Τις ρίζες της εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$.

   (στ) Το πρόσημο της διακρίνουσας του τριωνύμου
   $$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}.$$

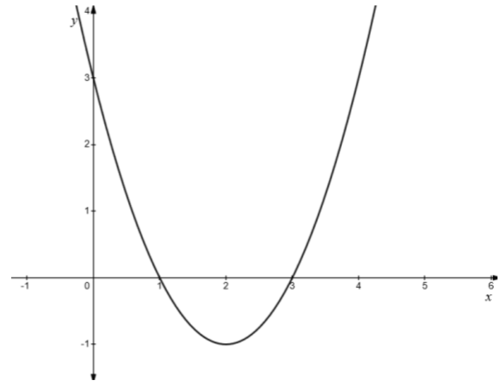


3. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0}$. Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

   (α) το πρόσημο του $\boldsymbol{\alpha}$
   (β) τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης
   (γ) τις συντεταγμένες του μέγιστου σημείου της συνάρτησης
   (δ) το πεδίο τιμών της συνάρτησης
   (ε) το πρόσημο της παράστασης $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$
   (στ) την τιμή του $\boldsymbol{\gamma}$
   (η) τις ρίζες της $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$
   (θ) τις τιμές $\boldsymbol{f(-2)}$ και $\boldsymbol{f(0)}$.

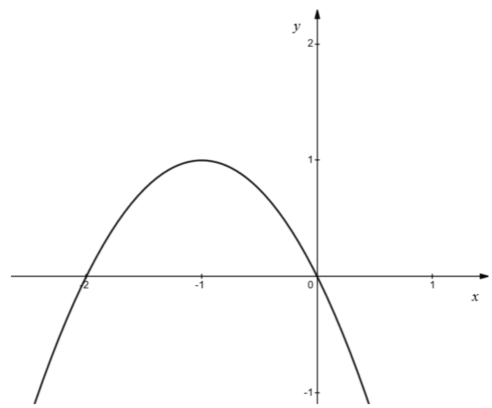


4. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0}$. Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:



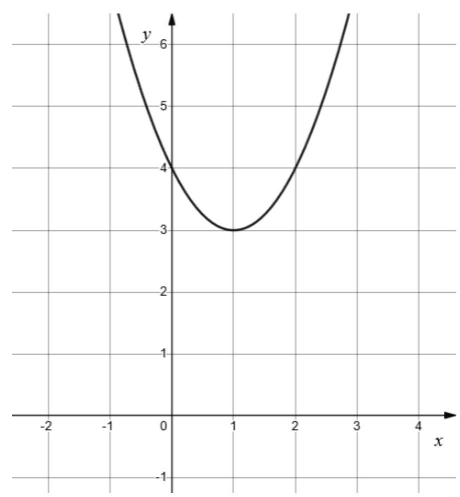
(α) το πρόσημο του $\boldsymbol{\alpha}$
(β) το πρόσημο του $\boldsymbol{\beta}$
(γ) το πρόσημο της διακρίνουσας $\boldsymbol{\Delta}$
(δ) την τιμή του $\boldsymbol{\gamma}$
(ε) τις ρίζες της $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$
(στ) τις τιμές του $\boldsymbol{x}$ για τις οποίες είναι $\boldsymbol{y < 0}$.

5. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0}$. Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:



(α) το πρόσημο του $\boldsymbol{\alpha}$
(β) το πρόσημο του $\boldsymbol{\beta}$
(γ) το πρόσημο της διακρίνουσας $\boldsymbol{\Delta}$
(δ) την τιμή του $\boldsymbol{\gamma}$
(ε) τις ρίζες της $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$
(στ) τις τιμές του $\boldsymbol{x}$ για τις οποίες είναι $\boldsymbol{f(x) > 0}$.

6. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0}$. Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:



(α) το πρόσημο του $\boldsymbol{\alpha}$
(β) το πρόσημο του $\boldsymbol{\beta}$
(γ) το πρόσημο της διακρίνουσας $\boldsymbol{\Delta}$
(δ) την τιμή του $\boldsymbol{\gamma}$
(ε) τις ρίζες της $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$
(στ) τις τιμές του $\boldsymbol{x}$ για τις οποίες είναι $\boldsymbol{f(x) > 0}$.

7. Να γίνει η γραφική παράσταση των πιο κάτω παραβολών:
(α) $y = x^2 - 2x + 3$

(β) $y = -(x+3)^2 + 1$

(γ) $y = (2x+1)^2 + 4$

8. Η γραφική παράσταση της $f(x)=4x^2+\beta x+\gamma$ τέμνει τον άξονα των χ στα σημεία Α(-3,0) και Β(-1,0).
(α) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $4x^2+\beta x+\gamma=0$.
(β) Να υπολογίσετε τις τιμές των β και γ.
(γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των τεταγμένων.

9. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής $g(x)$ που προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση:
(α) της, $f(x)=x^2$, κατά 4 μονάδες προς τα κάτω
(β) της $f(x)=-x^2$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω
(γ) της $f(x)=x^2-1$, κατά 3 μονάδες προς τα πάνω

10. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής $g(x)$ που προκύπτει από την μετατόπιση:
(α) της, $f(x)=x^2$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 4 μονάδες προς τα κάτω
(β) της $f(x)=-x^2$, κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και 5 μονάδες προς τα κάτω

11. Να συμπληρώσετε ανάλογα τα στοιχεία της παραβολής που ζητούνται σε κάθε περίπτωση:
(α) $f(x)=x^2-3$, Κορυφή .... Άξονας συμμετρίας................

(β) $g(x)=-4-x^2$, Σύνολο τιμών................ $g(2)=$ ....

(γ) $h(x)=-(x-2)^2$, Άξονας συμμετρίας....... Μέγιστη/Ελάχιστη Τιμή...........

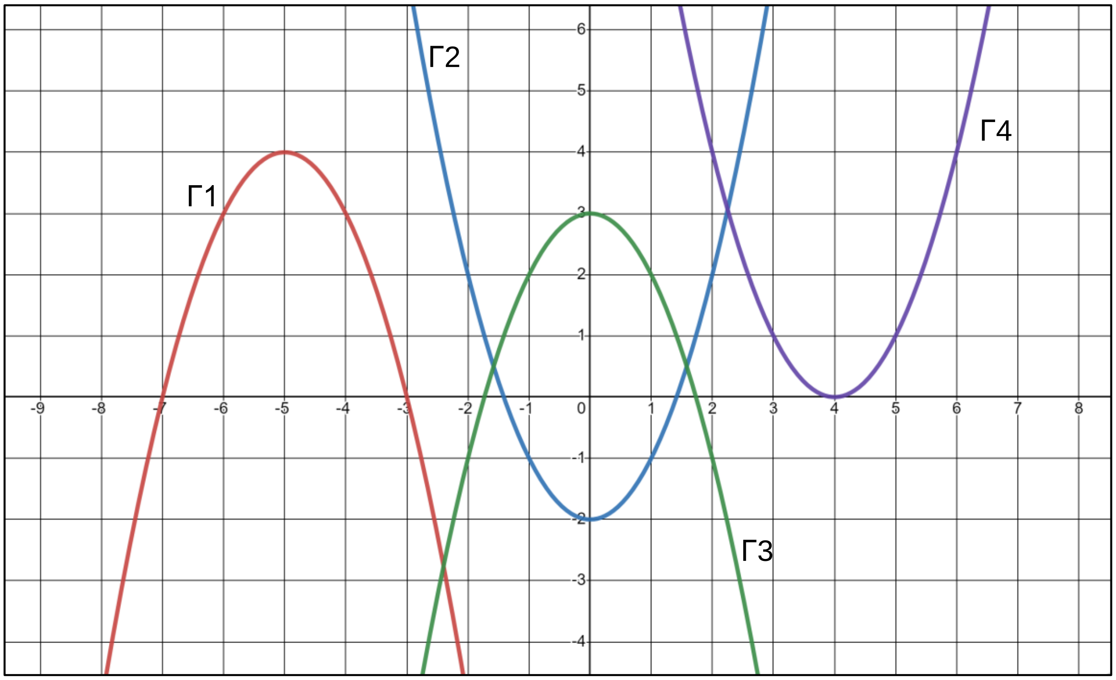
(δ) $k(x)=-x^2-4x-4$, Άξονας συμμετρίας......... Σύνολο Τιμών...........

12. Αν $\mathbf{x_1}$ και $\mathbf{x_2}$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\mathbf{2x^2+8x+4=0}$, να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων χωρίς να λύσετε την εξίσωση:
(α) x_1+x_2, (β) $x_1\cdot x_2$, (γ) $\frac{5}{x_1}+\frac{5}{x_2}$, (δ) $(2x_1-3)(2x_2-3)$, (ε) ${x_1}^2+{x_2}^2$

13. (α) Να σχηματίσετε εξίσωση β΄ βαθμού με ρίζες $x_1=2+\sqrt{3}$ και $x_2=2-\sqrt{3}$.
(β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $y=x^2-4x+1$ με την ευθεία $y=1-3x$.

14. Να υπολογίσετε τις τιμές του λ αν η εξίσωση $(\lambda+2)x^2-3\lambda x+\lambda=0$
(α) έχει μια ρίζα ίση με -1 .
(β) έχει ρίζες αντίθετες
(γ) έχει ρίζες αντίστροφες
(δ) άθροισμα ριζών ίσο με το γινόμενο των ριζών της
(ε) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

15. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων συναρτήσεων, οι οποίες αποτελούν μετατοπίσεις είτε της $y = x^2$ είτε της $y = -x^2$.



Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Τύπος			$y = x^2 - 2$	
Γραφική Παράσταση	Γ1	Γ4		

16. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha < 0$ με ρίζες τους αριθμούς -1 και 2 .
Να βρείτε το πρόσημο των $f(-10), f(-3), f(0), f(2), f(3), f(\frac{1}{2})$.

17. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\dfrac{6x^2 - 13x + 5}{4x^2 - 1}$ β) $\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

18. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2 - 2x > 15$ β) $2x - 4x^2 \geq 0$ γ) $x^2 + 3x + 3 \leq 0$

19. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α) $x^2 - 7x + 12 < 0$ (β) $3x^2 - 4x + 2 > 0$ (γ) $-x^2 - x + 6 \geq 0$

(δ) $x^2 + 2x - 3 < 0$ (ε) $5x^2 - 4x + 3 > 0$ (στ) $-x^2 - x + 2 \geq 0$

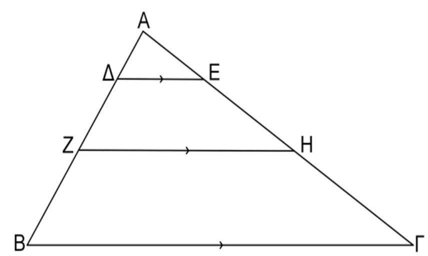
20. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

(α) $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=9 \end{cases}$ (β) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ (γ) $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases}$ (δ) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=16 \end{cases}$

21. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(\mu^2+1)x+\mu^2-\mu+2=0$ με ρίζες x_1, x_2.
Για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ ισχύει $-4x_1-4x_2-3x_1 \cdot x_2 \leq 2$;

ΕΝΟΤΗΤΑ 6 - ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ - ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

1. Στο τρίγωνο **ΑΒΓ** (διπλανό σχήμα) τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΖΗ είναι παράλληλα προς τη βάση ΒΓ. Αν $\mathrm{A\Delta} = 4\text{ cm}, \Delta\mathrm{Z} = 6\text{ cm}, \mathrm{EH} = 9\text{ cm}$ και $\mathrm{A\Gamma} = 27\text{ cm}$ να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΕ και ΖΒ.



2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ $\left(\widehat{\mathrm{A}} = 90°\right)$, φέρουμε το ύψος ΑΔ . Από το Δ φέρουμε τη ΔΕ κάθετη στην ΑΒ.

Να δείξετε ότι:
(α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΔ είναι όμοια
(β) $(\mathrm{A\Delta})^2 = (\mathrm{A\Gamma})(\Delta\mathrm{E})$

3. Σε κύκλο με κέντρο Ο φέρουμε τη διάμετρο ΑΒ , την χορδή ΒΓ και την διάμεσο ΟΜ του τριγώνου ΟΒΓ.Η προέκταση της ΟΜ τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου στο Α στο σημείο Τ.

Να δείξετε ότι:
(α) τα τρίγωνα ΟΒΜ και ΑΒΓ είναι όμοια

(β) $(\mathrm{OM})(\mathrm{AT}) = (\mathrm{OA})(\mathrm{MB})$

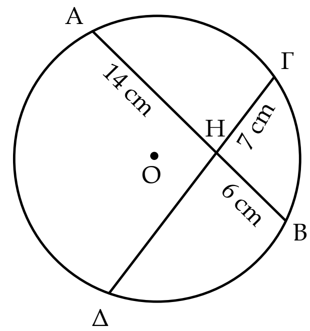
4. Σε κύκλο με κέντρο Ο φέρουμε από εξωτερικό σημείο Ε του κύκλου την εφαπτομένη ΓΕ και την τέμνουσα ΕΑΒ.
Να δείξετε ότι:
(α) τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΕΓΒ είναι όμοια

(β) Αν ΕΑ=4 cm και ΕΒ=9 cm να υπολογίσετε το μήκος της ΕΓ.

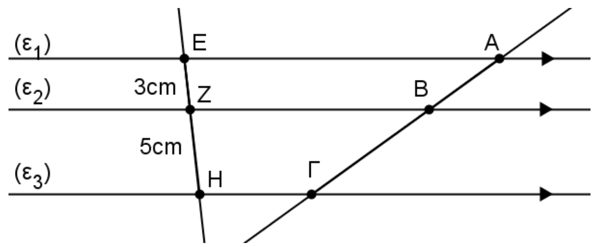
(γ) (ΕΑ)(ΒΓ)=(ΕΓ)(ΓΑ)

5. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και οι διαστάσεις των τμημάτων ΑΗ=14cm , ΗΒ=6cm και ΓΗ=7cm.

   Να δείξετε ότι (ΑΗ)(ΗΒ)=(ΓΗ)(ΗΔ) και να υπολογίσετε το μήκος του ΗΔ.



6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$.
   Αν (ΕΖ)= 3 cm, (ΖΗ)= 5 cm και (ΑΓ)= 16 cm, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΒ.



7. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ. Από σημείο Α της ΜΝ φέρουμε κάθετη ΑΒ πάνω στη διαγώνιο ΝΛ (Β σημείο της ΝΛ), η οποία τέμνει την προέκταση της ΛΜ στο σημείο Γ. Να δείξετε ότι:

   (α) τα τρίγωνα ΓΜΑ και ΓΛΒ είναι όμοια

   (β) $(\text{AB})(\text{M}\Gamma) = (\text{AM})(\text{BN})$

8. Δίνεται κύκλος (Κ ,R) με ακτίνα $\text{R} = \sqrt{13}\text{cm}$, διάμετρο ΒΓ και χορδή $\text{BA} = 4\text{cm}$.
   Αν Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΓ και η ευθεία ΒΜ τέμνει τον κύκλο και στο Δ, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΜΔ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7 - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1. Οι θερμοκρασίες που καταμετρήθηκαν το πρώτο δεκαπενθήμερο του Δεκέμβρη στο Τρόοδος ήταν:

   0, 5, 8, 6, 5, 4, 0, 6, 0, 6, 1, 6, 6, 7, 0 βαθμοί Κελσίου.

   Να υπολογίσετε:
   (α) Τη μέση θερμοκρασία των παραπάνω θερμοκρασιών
   (β) Τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή των θερμοκρασιών.
   (γ) Την τυπική απόκλιση.

2. Η μέση τιμή των χρημάτων μεταξύ τεσσάρων αδελφών είναι €24.
   Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή των χρημάτων τους, αν:
   (α) ο πατέρας δώσει στον καθένα ακόμα €10

   (β) αγοράσουν από μία σοκολάτα που στοιχίζει €4

   (γ) την επόμενη μέρα διαπιστώσει το κάθε παιδί ότι κρατά ένα ευρώ περισσότερο από τα μισά χρήματα που είχε την προηγούμενη μέρα;

3. Ποιο είναι το εύρος τιμών στους πιο κάτω βαθμούς ενός τμήματος σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών;

   12, 13, 20, 8, 10, 11, 10, 9, 7, 14, 15, 15, 19, 12, 8, 19, 9

4. Σε μια χώρα, το σχολικό έτος χωρίζεται σε τέσσερα (4) δίμηνα και ο μαθητής αξιολογείται, αριθμητικώς με κλίμακα από το 1 μέχρι το 10. Τελική εξέταση δεν υπάρχει. Ο βαθμός σε ένα μάθημα στο τέλος του χρόνου συνυπολογίζεται από τους βαθμούς των τεσσάρων διμήνων με βαρύτητα 20% στο πρώτο, 30% στο δεύτερο, 40% στο τρίτο και 10% στο τέταρτο δίμηνο. Να βρείτε το βαθμό στο τέλος του χρόνου κάποιου μαθητή που έχει βαθμούς 8 στο πρώτο, 9 στο δεύτερο, 8 στο τρίτο και 5 στο τέταρτο δίμηνο.

5. Σε μια έρευνα καταγράφηκε ο αριθμός των ωρών που χρησιμοποίησαν το διαδίκτυο 20 μαθητές κατά τη διάρκεια ενός Σαββατοκύριακου. Τα αποτελέσματα ήταν τα εξής:

   2, 3, 1, 2, 4, 2, 5, 3, 3, 2, 1, 4, 2, 5, 3, 2, 4, 1, 2, 3

   (α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε πίνακα κατανομής συχνοτήτων (συχνότητα, αθροιστική συχνότητα)
   (β) Να κατασκευάσετε πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων.
   (γ) Αν το σχολείο θέλει να αναθέσει μια γραπτή εργασία στους μαθητές που χρησιμοποίησαν το διαδίκτυο από 3ώρες και πάνω πόσοι μαθητές θα κάνουν την εργασία αυτή;
   (δ) Πόσες ώρες χρησιμοποίησαν το διαδίκτυο το 75% των μαθητών;

6. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση και την διασπορά των βαθμών ενός διαγωνίσματος, όπως φαίνονται πιο κάτω:

   12, 13, 20, 8, 10, 11, 10, 9, 7, 14, 15, 15, 19, 12, 8, 19, 9

7. Μελετήθηκαν οι ώρες εβδομαδιαίας μελέτης 100 φοιτητών και τα δεδομένα ομαδοποιήθηκαν ως εξής:

Ώρες μελέτης	**Συχνότητα**	**Αθροιστική Συχνότητα**
[0 , 4)	15	
[4, 8)	25	
[8, 12)	35	
[12, 16)	20	
[16, 20)	5	

(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων
(β) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων
(γ) Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια (Q_1 , Q_2 , Q_3) δίνοντας την απάντηση σας κατά προσέγγιση ακεραίου.

8. Στο διπλανό πίνακα καταγράφονται οι μέρες άδειας των 12 υπαλλήλων μιας εταιρείας για το καλοκαίρι.

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

(β) Εάν αυξηθούν οι μέρες άδειας όλων των υπαλλήλων της εταιρείας κατά 5 μέρες, να βρείτε τη νέα μέση τιμή.

Μέρες Άδειας($\boldsymbol{x_i}$)	Αριθμός Υπαλλήλων ($\boldsymbol{f_i}$)
4	2
7	2
12	1
14	3
15	1
16	1
18	1
19	1

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΝΙΑΙΑ ΤΕΛΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 2024 – 2025

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

Διάρκεια: 90 λεπτά

Το δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) σελίδες

ΟΔΗΓΙΕΣ:
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

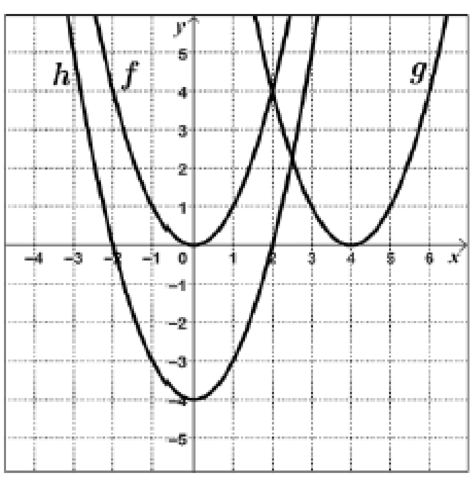
ΜΕΡΟΣ Α: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χρησιμοποιώντας ιδιότητες ριζών, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής: (2021 – 2022 Α΄ Τετρ.)

α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$

β) $\sqrt{23 + \sqrt[3]{8}}$

Α2. Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και h. Η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, και οι συναρτήσεις g και h είναι μετατοπίσεις της f. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, με το κατάλληλο γράμμα, αντιστοιχίζοντας σε κάθε εξίσωση τη σωστή γραφική παράσταση.
(2022 – 2023 Β΄ Τετρ.)

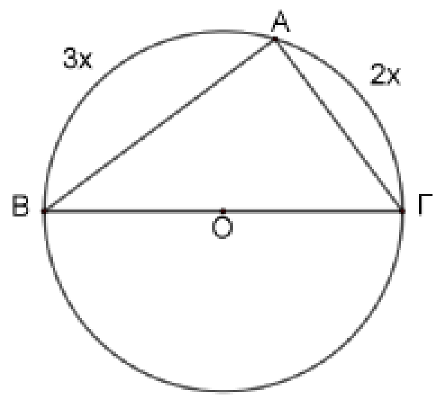


Εξίσωση	Γραφική παράσταση
$y = x^2 - 4$	
$y = (x-4)^2$	

Να μεταφέρετε τον συμπληρωμένο πίνακα στο τετράδιο απαντήσεων

Α3. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο $Ο$.
Αν $\widehat{ΑΒ} = 3x$ και $\widehat{ΑΓ} = 2x$, να βρείτε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(2019 – 2020)



Α4. Σε ένα διαγώνισμα η μέση τιμή της βαθμολογίας για το τμήμα Α΄ ήταν 16,5 και η τυπική απόκλιση 3,2.

α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας.

β) Να συγκρίνετε την ομοιογένεια των βαθμών του τμήματος Α΄ με τους αντίστοιχους βαθμούς του τμήματος Β΄ που είχε τον ίδιο μέσο όρο, αλλά η τυπική απόκλιση του ήταν 1,5.

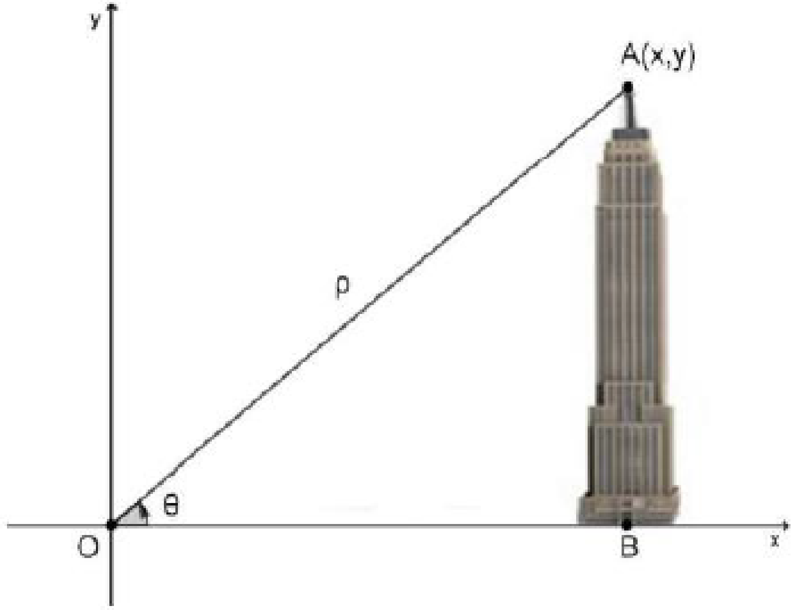
Α5. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + 3\lambda - 4 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει:

(2020 – 2021)

α) λύση τον αριθμό 5

β) λύσεις αντίθετες

Α6. Το κτήριο, στο πιο κάτω σχήμα, έχει τοποθετηθεί σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, έτσι ώστε, το πιο ψηλό του σημείο να είναι το $A(x, y)$. Το σημείο $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων και $OA = \rho$. (2020 – 2021)



α) Να αντιστοιχίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της στήλης Α με την κατάλληλη σχέση στη στήλη Β.

Να μεταφέρετε την αντιστοιχία στο τετράδιο απαντήσεων. (6 μον.)

Α	
(α)	$\eta\mu\theta$
(β)	$\sigma\upsilon\nu\theta$
(γ)	$\varepsilon\varphi\theta$

Β	
1	$\frac{x}{\rho}$
2	$\frac{y}{\rho}$
3	$\frac{y}{x}$

β) Αν η γωνία $\hat{\theta} = 40^\circ$ και $x = 530m$ να υπολογίσετε το ύψος y, του κτηρίου. Να δώσετε την τελική σας απάντηση με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.

(4 μον.)

ΜΕΡΟΣ Β: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες. Οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία ενώ η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες. Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1. Στο διπλανό διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0.$$

Να βρείτε:

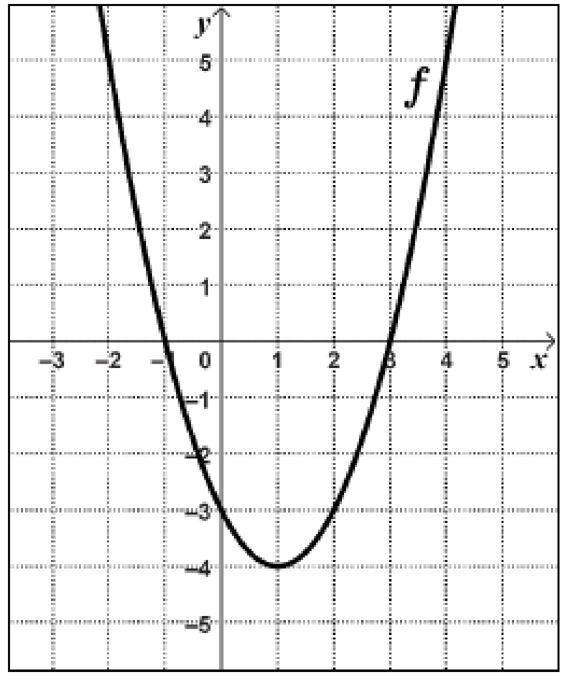
α) την τιμή του γ

β) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

γ) το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

δ) τις λύσεις x_1, x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

ε) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$



(2022 – 2023 Β΄ Τετρ.) (10 μον.)

Β2. Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{12}{13}$, $90° < \theta < 180°$. Με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

(2022 – 2023 Α΄ Τετρ.)

α) να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \frac{5\sigma\varphi\theta - 13\eta\mu\theta}{26\sigma\upsilon\nu\theta + 24\varepsilon\varphi\theta}$

(10 μον.)

β) αν $A = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2\theta(1 + \varepsilon\varphi^2\theta) + \eta\mu^2\theta(1 + \sigma\varphi^2\theta) = 4A$

(5 μον.)

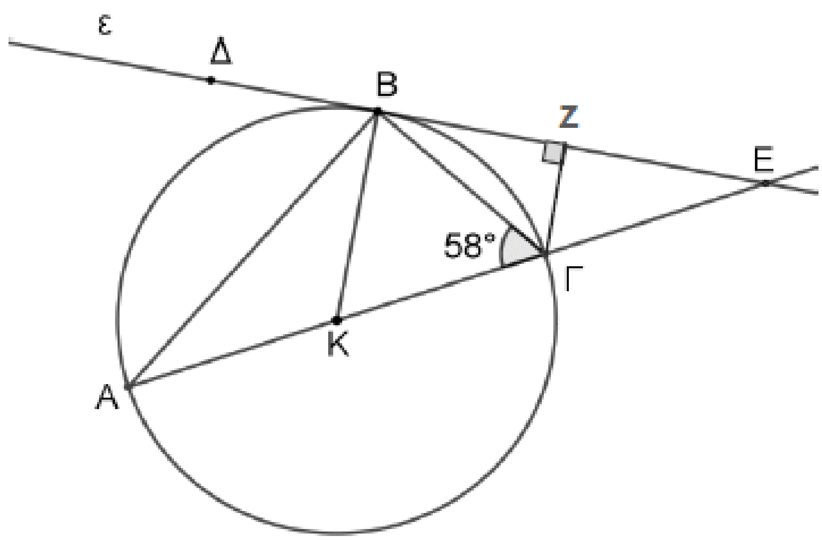
B3. Στο πιο κάτω σχήμα η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) στο σημείο B. Η προέκταση της διαμέτρου $A\Gamma$ τέμνει την εφαπτομένη (ε) στο σημείο E , $\Gamma Z \perp (\varepsilon)$ και η γωνία $B\widehat{\Gamma}A$ έχει μέτρο 58^o.

(2019 – 2020 και επιπλέον το β) ερώτημα)

α) Να βρείτε το μέτρο των γωνιών $B\widehat{K}A$ και $A\widehat{B}\Delta$. (5 μον.)

β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma Z$ είναι όμοια. (10 μον.)

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



ΤΕΛΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024-2025
Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 16 Μαΐου 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

Α΄ ΣΕΙΡΑ
ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων **εκτός αν σας ζητηθεί στην άσκηση.**
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας **το όνομά σας**.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

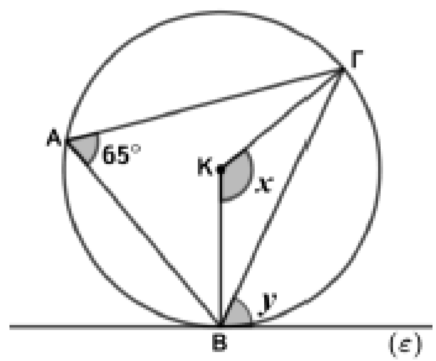
ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

Α1 Αν x_1 , x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - 6x - 5 = 0$, τότε να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x_1 + x_2$

(β) $x_1 \cdot x_2$

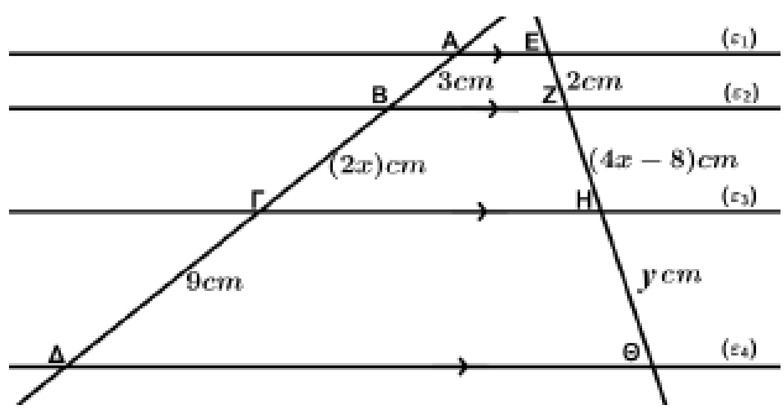
Α2 Δίνεται ο κύκλος (K, R) και η εγγεγραμμένη γωνία του $BA\Gamma$ με μέτρο ίσο με 65°, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών x και y, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



Α3 Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$, $AB = 3\ cm$, $B\Gamma = (2x)\ cm$, $\Gamma\Delta = 9\ cm$, $EZ = 2\ cm$, $ZH = (4x - 8)\ cm$ και $H\Theta = y\ cm$. Να υπολογίσετε:

(α) την τιμή του x

(β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $Z\Theta$.

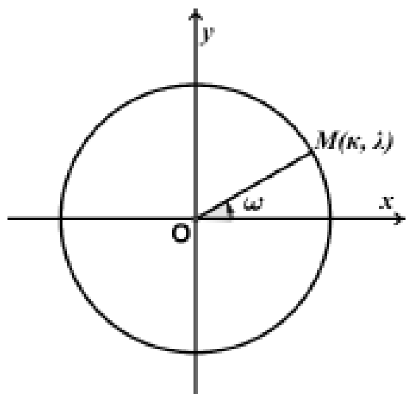


Α4 Στο μάθημα των Μαθηματικών η Μαρία αξιολογήθηκε το Α΄ τετράμηνο με 16, το Β΄ τετράμηνο με 14 και στην τελική γραπτή εξέταση βαθμολογήθηκε με 15. Αν η βαρύτητα του κάθε τετραμήνου είναι 35% και της τελικής γραπτής εξέτασης 30%, τότε να υπολογίσετε τον τελικό βαθμό της Μαρίας στα Μαθηματικά.

Α5 Δίνονται οι παραστάσεις: $\kappa = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}$ και $\lambda = \sqrt[3]{2} \div 2^{\frac{4}{3}}$

(α) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες ριζών, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να αποδείξετε ότι $\kappa = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \dfrac{1}{2}$. **(7 μονάδες)**

(β) Στο πιο κάτω σχήμα, η τελική πλευρά της γωνίας ω, η οποία είναι σε κανονική θέση, τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(\kappa,\lambda)$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\varepsilon\varphi(90° - \omega)$. **(3 μονάδες)**



Α6 (α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (\lambda+1)x + 3\lambda - 5\,, x \in \mathbb{R}\,, \lambda \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή του λ ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -1$. **(2 μονάδες)**

(β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda+1)x + 3\lambda - 5 = 0\,, \lambda \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την/τις τιμή/τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει λύσεις:

i) αντίστροφες **(3 μονάδες)**

ii) πραγματικές και άνισες. **(5 μονάδες)**

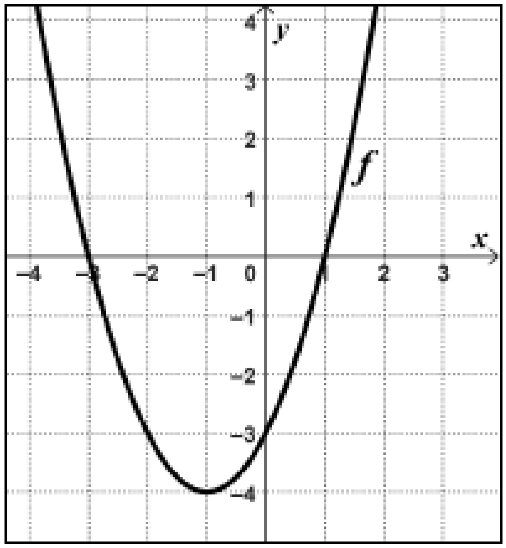
ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.
Οι ασκήσεις Β1 και Β2 βαθμολογούνται με δεκαπέντε (15) μονάδες και η άσκηση Β3 με δέκα (10) μονάδες.

Β1 Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0.$



(α) Να βρείτε:

i) το πρόσημο του α

ii) το πρόσημο της διακρίνουσας (Δ) της εξίσωσης $f(x) = 0$

iii) την τιμή του γ

iv) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

v) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής

vi) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$

(12 μονάδες)

(β) Σε κάθε ένα από τα ακόλουθα ερωτήματα, να επιλέξετε μία μόνο ως ορθή απάντηση και να τη σημειώσετε στο τετράδιο απαντήσεών σας:

i) Οι συντεταγμένες της κορυφής της πιο πάνω παραβολής είναι:

Α) $K(-4,-1)$ Β) $K(0,-3)$

Γ) $K(-1,-4)$ Δ) $K(-3,0)$

ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$ είναι:

Α) $x \in (-3,1)$ Β) $x \in (-\infty,-3) \cup (1,+\infty)$

Γ) $x \in (-\infty,-3] \cup [1,+\infty)$ Δ) $x \in [-3,1]$

(3 μονάδες)

Β2 (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\sigma\varphi\theta=\eta\mu\theta$ **(5 μονάδες)**

(β) Δίνεται ότι $\eta\mu\theta=\dfrac{4}{5}$ και $90^\circ<\theta<180^\circ$. Να υπολογίσετε:

i) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\varepsilon\varphi\theta$ **(7 μονάδες)**

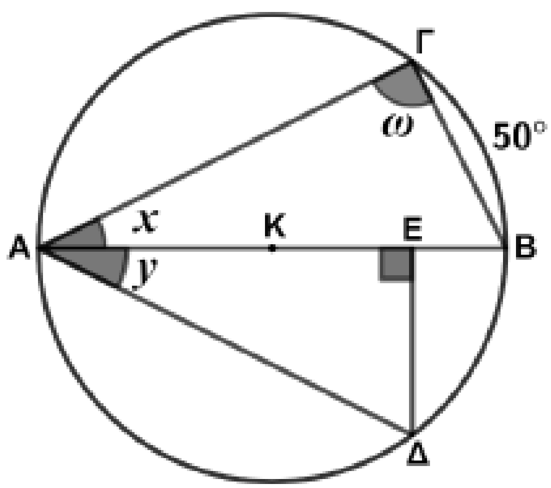
ii) την αριθμητική τιμή της πιο κάτω παράστασης

$A=3\varepsilon\varphi\theta+5\eta\mu\theta-10\sigma\upsilon\nu\theta$ **(3 μονάδες)**

Β3 Η διάμετρος AB του κύκλου (K,R) είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Gamma A\Delta$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το μικρό τόξο $B\Gamma$ έχει μέτρο 50° και το ευθύγραμμο τμήμα ΔE είναι κάθετο στη διάμετρο AB.

(α) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών x, y και ω. **(6 μονάδες)**

(β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AE\Delta$ είναι όμοια και στη συνέχεια να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $(AB)(AE)=(A\Gamma)(A\Delta)$. **(4 μονάδες)**



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023 - 2024

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ/ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 20 Μαΐου 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΚ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

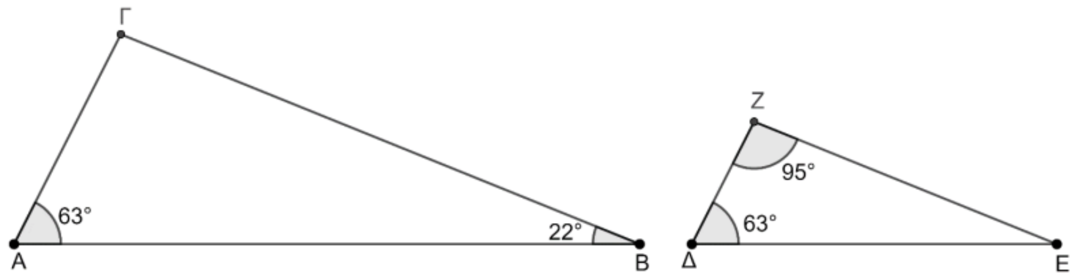
ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων, να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας **το όνομά σας**.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις κ.λπ.
6. Η τελευταία λευκή σελίδα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρόχειρο ή ως συμπληρωματικός χώρος απαντήσεων.
7. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
8. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
9. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

Μέρος Α΄: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1. Να αποδείξετε ότι τα πιο κάτω τρίγωνα είναι όμοια.



Α2. Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας με μέτρο $160°$.

Α3. Στο διπλανό διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση:

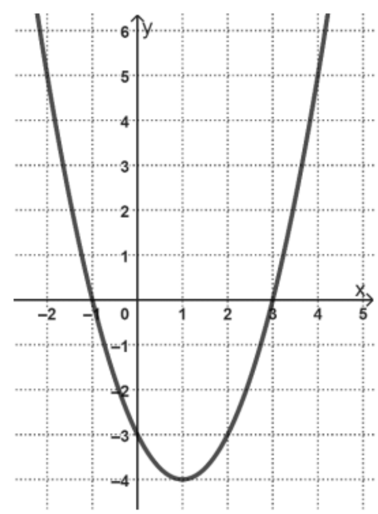
$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0.$$

Να βρείτε:

α) το πρόσημο του α,

β) τις λύσεις x_1, x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



Α4. α) Η τιμή 31 έχει βαρύτητα 0,1, η τιμή 43 έχει βαρύτητα 0,4 και η τιμή 52 έχει βαρύτητα 0,5. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πιο πάνω τιμών.

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\varepsilon\varphi x \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\varphi x \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 1$$

1/3

Α5. α) i. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\sqrt[3]{3+\sqrt{23+\sqrt[4]{16}}}$$

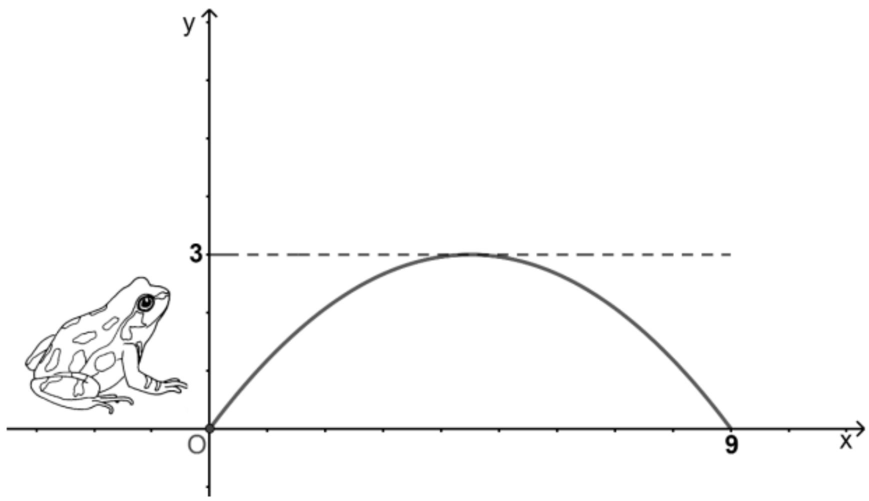
ii. Να αποδείξετε τη σχέση:

$$(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}})^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}, \quad \alpha,\beta\geq 0$$

β) Η εξίσωση $2x^2-6x+1=0$ έχει λύσεις τις $x_1,\ x_2$. Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(49^{x_1})^{x_2}+3^{x_1}\cdot 3^{x_2}$$

Α6. Ένα νεογέννητο βατραχάκι, ξεκινά από την αρχή των αξόνων και μπορεί να αναπηδήσει σε ύψος μέχρι 3 cm και να καλύψει οριζόντια απόσταση μέχρι 9 cm. Η τροχιά της κίνησής του έχει σχήμα παραβολής, όπως παρουσιάζεται στην πιο κάτω εικόνα.



α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου, στο οποίο το βατραχάκι θα επιτύχει το μέγιστο ύψος.

β) Η εξίσωση της παραβολής που περιγράφει την τροχιά της κίνησης του βατραχιού, δίνεται από τον τύπο:

$$y=\lambda x^2+\frac{4}{3}x, \quad \lambda\neq 0 \text{ και } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου λ.

2/3

Μέρος Β΄: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες, ενώ οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1. α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 - 7x + 12 \leq 0$$

(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x^2 + y^2 = 27 \end{cases}$ **(Μονάδες 6)**

Β2. α) Αν $\eta\mu\theta = \frac{15}{17}$ και $90° < \theta < 180°$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{17\eta\mu\theta - 15\sigma\varphi\theta}{23\ \varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\theta}$$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu(180° - x)}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu(90° - x) - \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu(90° - x)} = \frac{1}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$$

(Μονάδες 7)

Β3. α) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

i) $\sqrt{2\kappa + 1} = 3$ **(Μονάδες 6)**

ii) $\lambda^{\frac{1}{3}} = 2, \quad \lambda > 0$ **(Μονάδες 4)**

β) Αν $\kappa = 4$ και $\lambda = 8$, να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού με λύσεις τις κ και λ.

(Μονάδες 5)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

3/3

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2022-23

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΔΕΥΤΕΡΑ 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κ.Κ. (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Κ.Κ. : 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε σε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις κλπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού και διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων **να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία**.

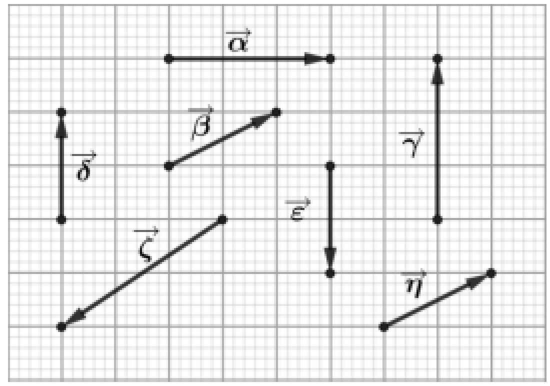
ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>: Αποτελείται από 6 ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Α1. Από το διπλανό σχήμα, να βρείτε δύο διανύσματα τα οποία να είναι:

(α) ίσα

(β) αντίθετα



Α2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

(β) $\sqrt{12-\sqrt[3]{27}}$

Α3. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ, αν:

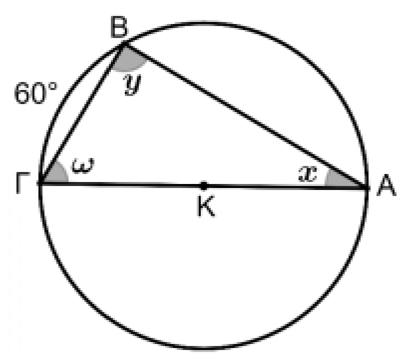
(α) $\theta = 135^{\circ}$

(β) $\theta = -30^{\circ}$

(γ) $\varepsilon\varphi\theta < 0$ και $\eta\mu\theta > 0$

(δ) $\eta\mu\theta = -\dfrac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = -\dfrac{4}{5}$

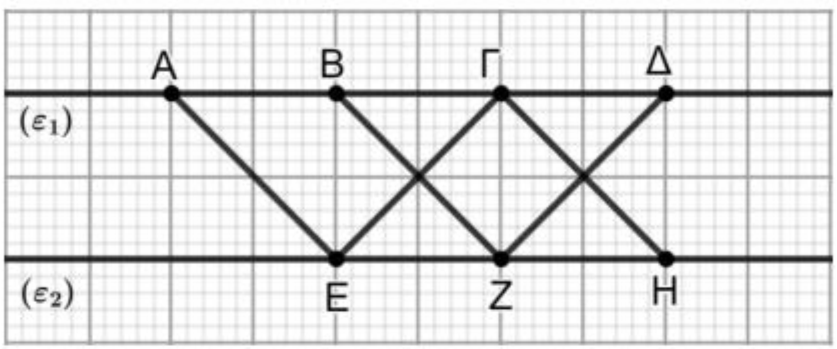
Α4. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο $Κ$.
Η πλευρά $ΑΓ$ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου και το τόξο $ΒΓ$ έχει μέτρο $60°$.
Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών x, y και ω, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



1 / 4

Α5. Δίνονται οι κύκλοι (K, R_1), (Λ, R_2), και (M, R_3), οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά μεταξύ τους, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα ενός επιτοίχιου διακοσμητικού. Αν $R_1 = 4cm$, $R_2 = 2cm$, $R_3 = 3cm$ και τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος KM. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Α6. Στο πιο κάτω σχήμα οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες. Οι αποστάσεις μεταξύ όλων των διαδοχικών σημείων, σε κάθε ευθεία, είναι ίσες.



(α) Να βρείτε το διάνυσμα που αντιστοιχεί στα πιο κάτω:

i) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{E\Gamma}$

ii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{ZE}$

iii) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HE}$ **(6 μονάδες)**

(β) Αν $\overrightarrow{AE} = \vec{\kappa}$ και $\overrightarrow{E\Gamma} = \vec{\lambda}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta Z}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{\kappa}$ και $\vec{\lambda}$.

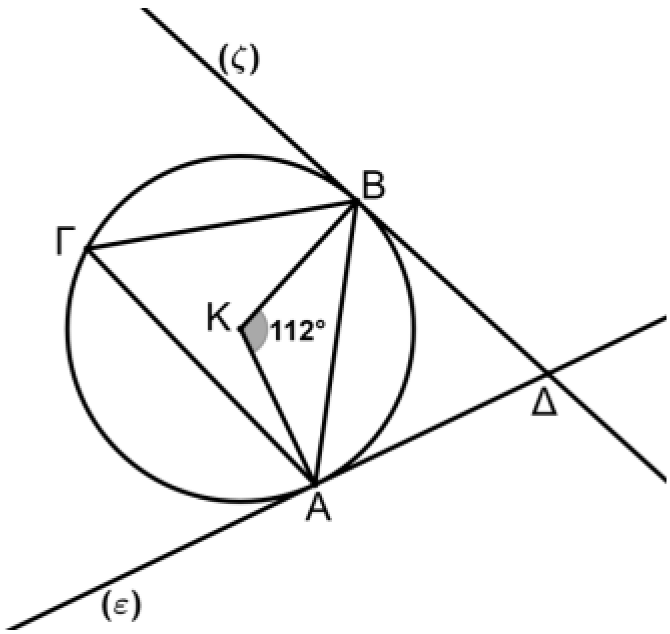
(4 μονάδες)

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>: Αποτελείται από 3 ασκήσεις και βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.
Δυο ασκήσεις βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία και μία άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K,ρ). Η γωνία AKB έχει μέτρο $112°$ και οι ευθείες (ε) και (ζ) είναι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία A και B αντίστοιχα.



(α) Να υπολογίσετε:

i) το μέτρο των γωνιών $A\Gamma B$, $BA\Delta$ και KBA **(6 μονάδες)**

ii) το μέτρο του τόξου $A\Gamma B$ **(2 μονάδες)**

(β) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$. **(2 μονάδες)**

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)

3 / 4

Β2. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \left(3\sqrt{6} + 4\sqrt{24} + \sqrt{96}\right) \div \sqrt{150} \quad \text{και} \quad B = \frac{2}{3+\sqrt{3}} + \frac{2}{3-\sqrt{3}}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $A = 3$ και $B = 2$. **(10 μονάδες)**

(β) Να λύσετε την εξίσωση $x^{\frac{2}{3}} = 6A \cdot B,\ x \geq 0$. **(5 μονάδες)**

Β3. Δίνεται ότι $συνθ = -\frac{12}{13}$, $90° < θ < 180°$. Με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

(α) να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \frac{5σφθ - 13ημθ}{26συνθ + 24εφθ}$

(10 μονάδες)

(β) αν $A = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι: $συν^2θ(1 + εφ^2θ) + ημ^2θ(1 + σφ^2θ) = 4A$

(5 μονάδες)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2022-23

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΔΕΥΤΕΡΑ 22 ΜΑΪΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κ.Κ. (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Κ.Κ. : 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

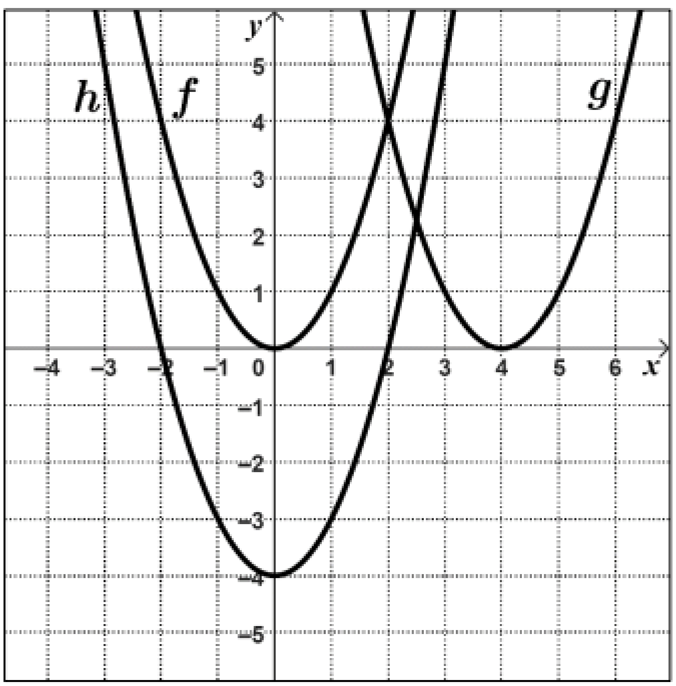
1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε σε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις κλπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού και διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων **να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία**.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>: Αποτελείται από 6 ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Α1. Να εξετάσετε αν η παραβολή με εξίσωση $f(x) = 3x^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Α2. Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και h. Η συναρτηση f έχει τύπο $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$, και οι συναρτησεις g και h είναι μετατοπίσεις της f. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, με το κατάλληλο γράμμα, αντιστοιχίζοντας σε κάθε εξίσωση τη σωστή γραφική παράσταση.



Εξίσωση	Γραφική παράσταση
$y = x^2 - 4$	
$y = (x - 4)^2$	

Να μεταφέρετε τον συμπληρωμένο πίνακα στο τετράδιο απαντήσεων

Α3. Να λύσετε την ανίσωση: $(x-3)(x+4) < 0$

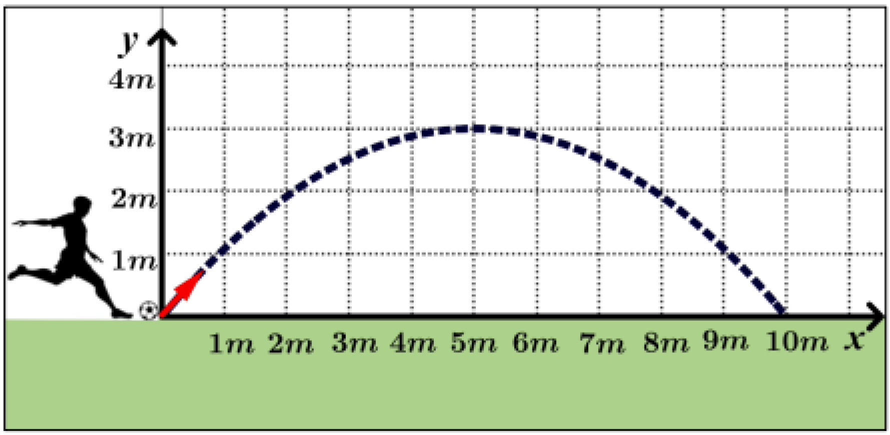
1 / 4

Α4. Ένας ποδοσφαιριστής κλωτσά μια μπάλα, η οποία διαγράφει παραβολική τροχιά και χτυπά στο έδαφος σε απόσταση $10m$ από αυτόν, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν η τροχιά της μπάλας έχει εξίσωση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ x \in [0,10],\ \alpha \neq 0$, με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

(α) το πρόσημο του α **(4 μονάδες)**

(β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής **(3 μονάδες)**

(γ) το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει η μπάλα **(3 μονάδες)**



Α5. Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-2x}$

Α6. Το άθροισμα των ηλικιών του Πέτρου και της Μαρίας είναι 23 και το γινόμενο των ηλικιών τους 120. Αν ο Πέτρος είναι μεγαλύτερος από τη Μαρία, να βρείτε την ηλικία του καθενός.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>: Αποτελείται από 3 ασκήσεις και βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες και οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.

Β1. Στο διπλανό διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$.

Να βρείτε:

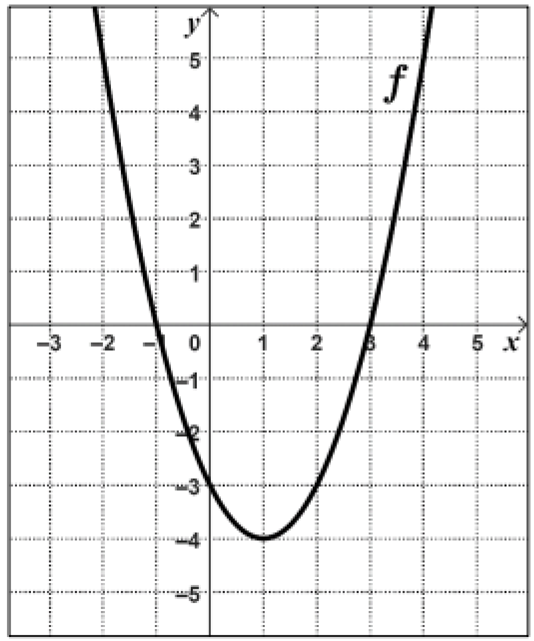
(α) την τιμή του γ

(β) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

(γ) το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

(δ) τις λύσεις $x_1,\ x_2$ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

(ε) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$



(10 μονάδες)

Β2. Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 6x + 4 = 0$, **χωρίς να λύσετε την εξίσωση**, να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x_1 + x_2$ **(3 μονάδες)**

(β) $x_1 \cdot x_2$ **(3 μονάδες)**

(γ) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ **(4 μονάδες)**

(δ) $(x_1 - 3)(x_2 - 3)$ **(5 μονάδες)**

3 / 4

Β3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\kappa - 2)x + 5 - \kappa = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του κ, $\kappa \in \mathbb{R}$, για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, ώστε η εξίσωση να έχει:

(i) λύση τον αριθμό 3 **(4 μονάδες)**

(ii) λύσεις αντίστροφες **(4 μονάδες)**

(β) Για ποιες τιμές του κ, $\kappa \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές και άνισες;

(7 μονάδες)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ